Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 57

Die Transformationsformel für Integrale

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale*, wofür wir noch eine Bezeichnung einführen.

DEFINITION 57.1. Sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow V$$

eine total differenzierbare Abbildung. Dann nennt man die Determinante

$$\det (D\varphi)_P$$

die *Jacobi-Determinante* (oder *Fundamental-Determinante*) von φ in $P \in G$.

Wir betrachten die Jacobi-Determinante als eine auf G definierte reellwertige Funktion $P \mapsto J(P) := \det (D\varphi)_P$. Bei einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung ist sie stetig, da dann die Einträge in der Jacobi-Matrix stetige Funktionen sind. Bei einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stimmt das totale Differential in jedem Punkt mit φ selbst überein, und daher ist die Jacobi-Determinante konstant. In Satz 55.9 haben wir gesehen, dass die Determinante der linearen Abbildung das Verhältnis zwischen dem Volumen von Bild und Urbild festlegt. Eine wesentliche Verallgemeinerung von dieser Beziehung wird durch die beiden folgenden Aussagen gegeben.

SATZ 57.2. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) = \det (D\varphi)_x$ für $x \in G$. Es sei $T \subseteq H$ eine (in $\mathbb{R}^n$) kompakte Teilmenge und es sei

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist $\varphi^{-1}(T)$ ebenfalls kompakt und es gilt

$$\int_T f \, d\lambda^n = \int_{\varphi^{-1}(T)} (f \circ \varphi) \, |J(\varphi)| \, d\lambda^n .$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. $\square$

Häufig startet man auch mit einer kompakten Teilmenge $S \subseteq G$ und setzt $T = \varphi(S)$ (dann gilt $S = \varphi^{-1}(T)$). Es kann auch auf S eine stetige Funktion $\tilde{f}$ definiert sein, dann muss man $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ setzen. Da ein Diffeomorphismus vorausgesetzt wird ist die Aussage dieses Satzes grundsätzlich symmetrisch.

Korollar 57.3. *Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante $(J(\varphi))(x) = \det{(D\varphi)_x}$ für $x \in G$. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (in $\mathbb{R}^n$) kompakte Teilmenge. Dann gilt

$$\lambda^n(T) \;=\; \int_{\varphi^{-1}(T)} |J(\varphi)| \; d\lambda^n.$$

Beweis. Dies folgt aus Fakt *****, angewendet auf die konstante Funktion $f = 1$. $\square$

Beispiel 57.4. Wir betrachten das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^2.$$

In reellen Koordinaten ist dies die differenzierbare Abbildung

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x^2-y^2, 2xy).$$

Diese Abbildung ist wegen $\varphi(x,y) = \varphi(-x,-y)$ nicht injektiv. Allerdings ist die Einschränkung auf die positive Halbebene $G = \{(x,y) | \, x > 0\}$ injektiv, und das Bild davon ist $H = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$ (also die Ebene ohne die negative reelle Achse). Die Jacobi-Matrix von φ ist

$$\operatorname{Jak}(\varphi)_{(x,y)} \;=\; \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x,y) \;=\; 4x^2 + 4y^2.$$

Wir möchten den Flächeninhalt des Bildes $T = \varphi(S)$ des Einheitswürfels $S = [0,1] \times [0,1]$ unter dieser Abbildung berechnen (die eine Seite des Einheitswürfels gehört nicht zu G, dieser Rand ist aber eine Nullmenge nach Fakt ***** und daher für den Flächeninhalt und die Integration unerheblich). Aufgrund von Fakt ***** ist dann

$$\begin{aligned} \lambda^2(T) \;&=\; \int_S (4x^2+4y^2) d\lambda^2 \\ &=\; \int_0^1 \int_0^1 \left(4x^2+4y^2\right) dxdy \\ &=\; \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 + 4xy^2\right) |_0^1 dy \\ &=\; \int_0^1 \left(\frac{4}{3} + 4y^2\right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y^3\right)|_0^1 \\ &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Beispiele zur Transformationsformel

KOROLLAR 57.5. *Es sei*

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (r,\theta) \longmapsto (r\ \cos\,\theta\,, r\ \sin\,\theta\,),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien G und H offene Mengen, auf denen φ einen Diffeomorphismus induziert. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ eine (in $\mathbb{R}^2$) kompakte Teilmenge und

$$f\colon\ T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \;=\; \int_{\varphi^{-1}(T)} f(r\ \cos\,\theta\,, r\ \sin\,\theta\,)\cdot r\, d\lambda^2(r,\theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem f die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\lambda^2(x,y) \;=\; \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\ \cos\,\theta\,, r\ \sin\,\theta\,)\cdot r\, d\theta\, dr.$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$\det\,(D\varphi) \;=\; \det \begin{pmatrix} \cos\,\theta & -r\,\sin\,\theta \\ \sin\,\theta & r\,\cos\,\theta \end{pmatrix} \;=\; r\,\cos^2\,\theta + r\,\sin^2\,\theta \;=\; r$$

direkt aus Fakt *****. □

LEMMA 57.6. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \;=\; 1.$$

Nennen wir dieses Integral I. Nach Fakt ***** ist

$$I^2 \;=\; \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right) \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = \cos\,\theta$ und $y = \sin\,\theta$ ist dieses Integral nach Fakt ***** und nach einer erneuten Anwendung von Fakt ***** gleich

$$= \;\frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]\times\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, d\lambda^2(r,\theta)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{[0,2\pi]} 1\, d\lambda^1(\theta)\right)\left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, d\lambda^1(r)\right)\\
&= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, d\lambda^1(r)\\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\, dr\\
&= -e^{-\frac{r^2}{2}}|_0^\infty\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Damit ist auch $I = 1$. ☐

Beispiel 57.7. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite $2a$ asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0,s] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei ψ zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$, was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi\colon\ [0,s]\times[-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung ψ injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \;\;=\;\; 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)).$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s]\times[-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| \; d\lambda^2 \,.$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \;\leq\; \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Fakt ***** geich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s]\times[-a,a]} 1 - r\,(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \; d\lambda^2 \\ = \;\; & 2as + \left(\int_{-a}^{a} r\, dr \right) \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\, dt \right) \\ = \;\; & 2as + 0 \cdot \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)\, dt \right) \\ = \;\; & 2as. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

Korollar 57.8. *Für die Zylinderkoordinatenauswertung*

$$\Psi \colon \; G = \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; (r, \theta, z) \longmapsto (r \, \cos\theta \,,\, r \, \sin\theta \,,\, z)\,,$$

eine kompakte Teilmenge $T \subseteq \Psi(G)$ *und eine stetige Funktion*

$$f \colon \; T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 \;=\; \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) \cdot r \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch schreiben als

$$\int\!\!\int\!\!\int_T f(x,y,z) dx dy dz \;=\; \int\!\!\int\!\!\int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r,\theta,z) \cdot r dr d\theta dz,$$

wobei $\tilde{f} = f \circ \Psi$ *bezeichnet.*

Beweis. Dies folgt aus Fakt *****,da die Jacobi-Determinante der Zylinderkoordinatenauswertung gleich r ist. □

Korollar 57.9. *Für die Kugelkoordinatenauswertung*

$$\Psi \colon \; G = \mathbb{R}_+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3, \; (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \, \cos\varphi \; \sin\theta \,,\, r \, \sin\varphi \; \sin\theta \,,\, r \, \cos\theta\,)\,,$$

eine kompakte Teilmenge $T \subseteq \Psi(G)$ *und eine stetige Funktion*

$$f \colon \; T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f\, d\lambda^3 \;=\; \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) r^2 \,\sin\,\theta\; d\lambda^3 .$$

Dies kann man auch schreiben als

$$\int\int\int_T f(x,y,z) dxdydz \;=\; \int\int\int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r,\theta,\varphi)\cdot r^2\,\sin\,\theta\, drd\theta d\varphi ,$$

wobei $\tilde{f} = f \circ \Psi$ *bezeichnet.*

Beweis. Nach Beispiel ***** ist die Jacobi-Determinante von Ψ im Punkt $(r,\,\theta,\,\varphi)$ gleich $r^2\,\sin\,\theta$, so dass die Aussage aus Fakt ***** folgt. □

Volumentreue Abbildungen

In Vorlesung 31 haben wir über Isometrien gesprochen, also lineare Abbildungen zwischen euklidischen Vektorräumen, die das Skalarprodukt und insbesondere die Norm respektieren. Aufgrund von Aufgabe ***** ist die Determinante einer Isometrie auf dem $\mathbb{R}^n$ gleich 1 oder -1, so dass sich gemäß Fakt ***** das Volumen von beliebigen kompakten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ unter der Abbildung nicht ändert, d.h. es ist stets $\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$.

Definition 57.10. Es seien G und H offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und es sei

$$\varphi\colon\; G \longrightarrow H$$

ein C^1-Diffeomorphismus. Man sagt, dass φ *volumentreu* ist, wenn

$$|(J(\varphi))(x)| \;=\; |\det{(D\varphi)_x}| \;=\; 1$$

ist für alle $x \in G$.

Im ebenen Fall spricht man natürlich von *flächentreu*. Für einen volumentreuen Diffeomorphismus ist $\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$ nach Fakt *****.

Beispiel 57.11. Es sei $h \in \mathbb{R}[y]$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen y. Dann ist die Abbildung

$$\varphi\colon\; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\; (x,y) \longmapsto (x+h(y),y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von φ ist ja

$$\mathrm{Jak}(\varphi)_{(x,y)} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von x und y vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu $\varphi(x,y) \;=\; (x+y^2,y)$ und $\psi(x,y) \;=\; (x,y+x^3)$ die Hintereinanderschaltung

$$(\psi \circ \varphi)(x,y) \quad = \quad \psi(\varphi(x,y))$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi(x+y^2, y) \\
&= (x+y^2, y+(x+y^2)^3) \\
&= (x+y^2, y+x^3+3x^2y^2+3xy^4+y^6).
\end{aligned}
$$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Hesounu* rybník.JPG , Autor = Benutzer Juan de Vojníkov auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4