Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 10

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Skizziere die reellen Nullstellengebilde von $Y^n - X^n$ und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen $V_n \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären n-Ecks (mit $(1,0)$ als einem Eck) besteht.

Aufgabe 10.2. Sei K ein Körper und sei A eine kommutative K-Algebra, die als K-Modul endlich sei. Zeige, dass ein Element $f \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn es ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 10.3. Wir betrachten auf- und absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen in $\mathbb{A}_K^n$ und von Idealen in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige die folgenden Aussagen. a) Für einen endlichen Körper wird jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär. b) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ wird nicht jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär. c) Für (einen beliebigen Körper und) $n \geq 1$ wird nicht jede absteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots$$

stationär. d) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ gibt es echt absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen beliebiger Länge.

Aufgabe 10.4. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann ist M genau dann noethersch, wenn jede aufsteigende Kette

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$$

von R-Untermoduln stationär wird.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des artinschen Moduls, der „dual" zum Begriff des noetherschen Moduls ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette
$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$$
von R-Untermoduln stationär wird.

Ein kommutativer Ring R heißt *artinsch*, wenn er als R-Modul artinsch ist.

Aufgabe 10.5. Es sei A ein artinscher Integritätsbereich. Man zeige, dass A ein Körper ist. Man gebe ein Beispiel eines artinschen kommutativen Ringes, der kein Körper ist.

Aufgabe 10.6. Seien K und L Körper, sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A, $K \subseteq A \subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

Aufgabe 10.7. Sei $\mathfrak{a}$ ein Radikal in einem kommutativen Ring. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von Primidealen ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.8. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal
$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$
in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination mit dem konstruierten Erzeugendensystem.

Aufgabe 10.9. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass der Restklassenring
$$K[X, Y]/(F)$$
eine endliche $K[T]$-Algebra ist.

Aufgabe 10.10. (5 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S endlich über R und T endlich über S ist. Zeige, dass dann auch T endlich über R ist.

Aufgabe 10.11. (5 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Man zeige, dass N genau dann artinsch ist, wenn M und P artinsch sind.

Aufgabe 10.12. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine endliche K-Algebra. Zeige: Dann ist A artinsch.

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige: Wenn M artinsch und $\phi : M \to M$ R-linear und injektiv ist, so ist ϕ ein Isomorphismus. Formuliere und beweise auch eine analoge Aussage für den Fall, das M noethersch ist.