Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2012

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 51

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 51.1. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ (x,y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 51.2. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Aufgabe 51.3. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi\colon U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 51.4. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Kugel $U(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 51.5. Es seien

$$f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

(1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
(2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.

(3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

Aufgabe 51.6. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1,0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

Aufgabe 51.7. Seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

Aufgabe 51.8. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

kann man reell schreiben als

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x+iy = (x,y) \longmapsto (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

Aufgabe 51.9.*

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

das zeigt, dass im Satz über die (lokale) Umkehrbarkeit die Bijektivität im Allgemeinen nur auf echten Teilintervallen besteht.

Aufgabe 51.10.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.11. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2. Es sei

$$\varphi \colon U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

Aufgabe 51.12. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, -y^4-2xy^2-x^2+y^2+x+y).$$

(Tipp: Versuche, diese Funktion als Hintereinanderschaltung von einfacheren Abbildungen zu schreiben.)

Aufgabe 51.13. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P+v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

ist für alle $P \in V$.

Aufgabe 51.14. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei

$$\varphi \colon G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

Aufgabe 51.15. (7 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x+y, xy).$$

(1) Bestimme die regulären Punkte von φ.

(2) Zeige, dass in den kritischen Punkten die Abbildung φ nicht lokal invertierbar ist, dass also die Einschränkung von φ in keiner offenen Umgebung eines kritischen Punktes bijektiv wird.
(3) Lässt sich jedes reelle Zahlenpaar (s, p) schreiben als $(s, p) = (x + y, xy)$?
(4) Ist ein reelles Zahlenpaar (x, y) bis auf Vertauschen der Komponenten eindeutig durch die Summe $x+y$ und das Produkt xy festgelegt?

Aufgabe 51.16. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x, y, z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x, y, z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 51.17. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2 z, y + \sin xz\ ).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.