Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Bestimme in $\mathbb{Z}/(3)[X]$ die Primfaktorzerlegung des Polynoms $P = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. Man beschreibe ferner die Produktzerlegung des Restklassenrings $\mathbb{Z}/(3)[X]/(P)$.

Aufgabe 2. Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad $2, 3, 4$.

Aufgabe 3. Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad nicht irreduzibel ist. Hinweis: Der Zwischenwertsatz hilft.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und seien $F, G \in K[X]$ zwei Polynome. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass F ein Teiler von G in $K[X]$ genau dann ist, wenn F ein Teiler von G in $L[X]$ ist.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ verschiedene Elemente und

$$F = (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

das Produkt der zugehörigen linearen Polynome. Zeige, dass der Restklassenring $K[X]/(F)$ isomorph zum Produktring K^n ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Zeige, dass in einem faktoriellen Bereich R der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Elementen $f, g \in R$ existieren.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei R ein faktorieller Bereich und $p \in R$ ein Primelement. Zeige, dass der Restklassenring $R/(p^n)$ nur die beiden trivialen idempotenten Elemente 0 und 1 besitzt.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Primfaktorzerlegung des Polynoms $P = X^6 + 3X^4 - 4$. Man beschreibe ferner die Produktzerlegung des Restklassenrings $\mathbb{Z}/(5)[X]/(P)$.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei $Q \in \mathbb{R}[X]$ ein quadratisches irreduzibles Polynom. Zeige, dass der Restklassenkörper $\mathbb{R}[X]/(Q)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome gibt.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

In der folgenden Aufgabe sind die Eigenschaften prim und irreduzibel in einem Monoid zu verstehen, ohne dass ein Ring vorliegt.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Betrachte die Menge M, die aus allen positiven natürlichen Zahlen besteht, in deren Primfaktorzerlegung (in $\mathbb{N}$) eine gerade Anzahl (mit Vielfachheiten gezählt) von Primfaktoren vorkommt. Zeige, dass M ein multiplikatives Untermonoid ist. Man charakterisiere die irreduziblen Elemente und die Primelemente in M.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring und I, J Ideale in R. Sei weiter

$$\varphi : R \longrightarrow R/I \times R/J,\ r \longmapsto (r + I, r + J).$$

Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn $I + J = R$ gilt. Wie sieht $\ker \varphi$ aus? Benutze jetzt den Homomorphiesatz um einzusehen, was das im Falle $R = \mathbb{Z}$ mit dem chinesischen Restsatz zu tun hat.

Abbildungsverzeichnis