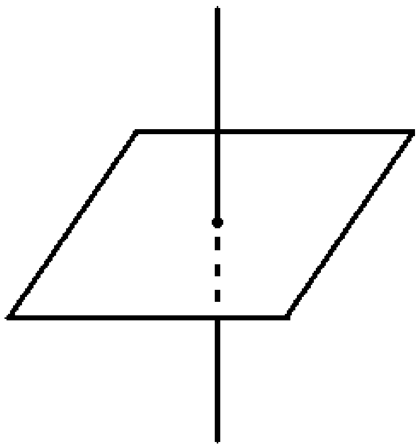
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 4.1. Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



AUFGABE 4.2. Sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine Teilmenge, die aus endlich vielen Punkten bestehe. Zeige: V ist genau dann irreduzibel, wenn V einpunktig ist.

AUFGABE 4.3. Skizziere ein Beispiel einer *zusammenhängenden*, aber nicht irreduziblen affin-algebraischen Teilmenge.

AUFGABE 4.4. Betrachte die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie. Ist $\mathbb{R}$ irreduzibel?

AUFGABE 4.5. Sei p eine Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige: Jede Quadrik der Form

$$F = aX^2 + bY^2 + c = 0$$

mit $a, b \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{Z}/(p)$.

Aufgabe 4.6. Erkläre, wo der Beweis zu Satz 4.8 zusammenbricht, wenn man ihn auf mehr als zwei Variablen ausdehnen will.

Aufgabe 4.7. Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.

In den folgenden Aufgabe werden die Begriffe *abgeschlossene Abbildung* und *offene Abbildung* verwendet.

Eine stetige Abbildung

$$f : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *abgeschlossen*, wenn Bilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Sie heißt *offen*, wenn Bilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Aufgabe 4.8. Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^1,\ (x, y) \longmapsto x,$$

nicht abgeschlossen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.9. Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.10. (3 Punkte)

Berechne in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ den Schnitt des Zylinders $V(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $P = (0, 0, 0)$ und Radius r in Abhängigkeit von r. Wann ist der Durchschnitt leer, wann irreduzibel?

Man darf verwenden, dass der reelle Kreis irreduzibel ist.

Aufgabe 4.11. (6 Punkte)

Sei p eine Primzahl ≥ 3 und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Es sei ein Polynom $F \in \mathbb{Z}/(p)[X, Y]$ der Form

$$F = \alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 + \delta X + \epsilon Y + \eta$$

gegeben. Zeige, dass für das zugehörige Nullstellengebilde $V(F) \subseteq \mathbb{A}^2_K$ (wenn α, β, γ nicht alle null sind, so ist das eine Quadrik) die folgenden drei Alternativen bestehen.

(1) $V(F)$ besitzt mindestens einen Punkt.
(2) $F = c$ mit einer Konstanten $c \neq 0$.
(3) Es gibt eine Variablentransformation derart, dass das Polynom in den neuen Koordinaten die Gestalt $Z^2 - u$ mit einem Nichtquadrat $u \in \mathbb{Z}/(p)$ besitzt.

Aufgabe 4.12. (3 Punkte)

Sei V eine irreduzible, affin-algebraische Menge mit mindestens zwei Punkten und seien $P_1, \ldots, P_m \in V$ endlich viele Punkte darin. Zeige, dass dann auch $V \setminus \{P_1, \ldots, P_m\}$ (in der induzierten Topologie) irreduzibel ist.

Aufgabe 4.13. (4 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper $Q(R)$. Zeige: Wenn $F, G \in R[X]$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, so besitzen sie aufgefasst in $Q(R)[X]$ ebenfalls keinen gemeinsamen Teiler.

(Man darf sich auf Hauptidealbereiche R beschränken.)

Aufgabe 4.14. (3 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen. Begründe, ob

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$$

irreduzibel ist oder nicht.

Aufgabe 4.15. (4 Punkte)

Zeige, dass die Projektion

$$\mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{A}^1_K,\ (x, y) \longmapsto x,$$

offen in der Zariski-Topologie ist.

Aufgabe 4.16. (4 Punkte)

Zeige, dass die affine Ebene $\mathbb{A}^2_K$ mit der Zariski-Topologie kompakt ist.