Fachbereich Mathematik/Informatik **27. September 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	4	4	4	4	6	9	5	6	6	64
erhalt. Pkt.:														

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(2) Das *Minimalpolynom* eines Elementes $x \in L$ in einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(3) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(4) Eine *einfache Radikalerweiterung* (von Körpern).
(5) Eine *Radikalerweiterung* (von Körpern).
(6) Eine *auflösbare* Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(7) Eine aus einer Teilmenge $T \subseteq E$ einer Ebene E *elementar konstruierbare* Gerade G.
(8) Eine *Fermatsche Primzahl*.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Fundamentalsatz der Algebra*.
(2) Der *Satz über die Galoiskorrespondenz* bei einer endlichen Galoiserweiterung $K \subseteq L$.
(3) Der *Satz von Abel-Ruffini*.
(4) Der *Satz über die Charakterisierung von konstruierbaren n-Ecken*.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$:

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -2-3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 4-2\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^4 + b_2 y^2 + b_1 y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Bestimme die Zerlegung des Polynoms $X^6 - 1$ in irreduzible Faktoren über den Körpern $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(5)$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_{125} \longrightarrow \mathbb{F}_{125}$$

bezüglich einer geeigneten $\mathbb{F}_5$-Basis von $\mathbb{F}_{125}$.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung, $x \in L$ $(x \neq 0)$ und sei $P \in K[X]$ das Minimalpolynom von x. Zeige, dass P irreduzibel ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Zeige, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ vom Grad n gibt.

Aufgabe 9. (6 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L|K)$ endlich ist.

Aufgabe 10. (9 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Der Körper K enthalte eine m-te primitive Einheitswurzel, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass es ein Element $v \in L$ gibt derart, dass die Menge

$$\{\varphi(v) |\, \varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)\}$$

eine K-Basis von L bildet.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Bestimme das Kreisteilungspolynom Φ_{14}.

Aufgabe 12. (6 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grad 3. Zeige mit Mitteln der Galoistheorie, dass P auflösbar ist.

Aufgabe 13. (6 Punkte)

Aus einer Menge $T \subseteq E$ seien „wie üblich“ Geraden und Kreise elementar konstruierbar. Als neue Punkte seien allerdings nur die Durchschnitte von einer Geraden mit einer Geraden und von einer Geraden mit einem Kreis erlaubt (also nicht der Durchschnitt von zwei Kreisen). Bestimme die Menge M der Punkte, die aus der Anfangsmenge $\{0, 1\}$ auf diese Weise konstruierbar ist.