Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 83

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 83.1. Berechne die Tangentialabbildung $T\varphi$ zu

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2y - 3xz^3 + y^2, x \sin y - e^{yz})$$

unter Verwendung der Identifizierungen $T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und $T\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 83.2. Es seien M_1 und M_2 orientierte Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass dann auch das Produkt $M_1 \times M_2$ eine orientierte Mannigfaltigkeit ist (wobei die Orientierung von der Ordnung auf $\{1,2\}$ abhängt).

Es seien M und N orientierte Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Diese heißt φ *orientierungstreu*, wenn für jeden Punkt $P \in M$ die Tangentialabbildung

$$T\varphi : T_PM \longrightarrow T_{\varphi(P)}N$$

bijektiv und orientierungstreu ist.

Aufgabe 83.3. Zeige, dass die antipodale Abbildung

$$\varphi : S^1 \longrightarrow S^1,\ P \longmapsto -P,$$

orientierungstreu ist.

Aufgabe 83.4. Es seien M_1 und M_2 orientierte Mannigfaltigkeiten. Zeige, dass die Vertauschungsabbildung

$$\varphi : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2 \times M_1,\ (P,Q) \longmapsto (Q,P),$$

bzgl. den jeweiligen Produktorientierungen nicht orientierungstreu sein muss.

Aufgabe 83.5. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Zeige, dass man auf $\bigwedge^k T^*M$ für jedes k eine Topologie erklären kann, bei der für jede Karte $\alpha : U \to V$ die Abbildung

$$\bigwedge^k T^*U \longrightarrow \bigwedge^k T^*V \cong V \times \bigwedge^k \mathbb{R}^{n*}$$

eine Homöomorphie ist.

Damit kann man von stetigen und auch von messbaren Differentialformen sprechen.

Aufgabe 83.6. Es sei M eine C^2-differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Zeige, dass $\bigwedge^k T^*M$ für jedes k eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 83.7. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}^k(M)$ die Menge der k-Formen auf M. Zeige, dass $\mathcal{E}^k(M)$ ein R-Modul zu $R = C^1(M, \mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 83.8. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $P \in M$ ein Punkt und $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei $v \in T_P M$ ein Tangentialvektor, der durch einen differenzierbaren Weg

$$\gamma :]-\delta, \delta[\longrightarrow M$$

mit $\gamma(0) = P$ repräsentiert werde. Zeige die Gleichheit

$$(df)(P, v) \;=\; (f \circ \gamma)'(0).$$

Aufgabe 83.9. Es sei $i : M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit. Zeige, dass für eine differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$i^*(df) \;=\; d(f \circ i)$$

gilt.

Aufgabe 83.10. Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ (u, v) \longmapsto (u^2, v^3 - u),$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2} dx \wedge dy\,.$$

Bestimme die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 83.11. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n und sei das Produkt $V^n = V \times \cdots \times V$ mit der Produkttopologie versehen. Es sei I ein reelles Intervall und

$$\varphi : I \longrightarrow V^n$$

eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

für jedes $t \in I$ eine Basis von V ist. Zeige, dass sämtliche Basen $\varphi(t)$, $t \in I$, die gleiche Orientierung auf V repräsentieren.

Aufgabe 83.12. (6 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit dem Kotangentialbündel T^*M. Es sei ω eine k-Differentialform, also eine Abbildung

$$\omega : M \longrightarrow \bigwedge^k T^*M$$

mit $\omega(P) \in \bigwedge^k T_P^*M$ für alle $P \in M$, wobei dieses Dachprodukt mit der natürlichen Topologie (siehe Aufgabe 83.5) versehen sei. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) ω ist stetig.
(2) Für jede Karte $\alpha : U \to V$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und mit der lokalen Darstellung $\alpha_* \omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_J dx_J$ sind die Funktionen f_J stetig.
(3) Es gibt eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit Kartengebieten U_i derart, dass in den lokalen Darstellungen $\alpha_{i*} \omega = \sum_{J,\, \#(J)=k} f_{iJ} dx_J$ die Funktionen f_{iJ} stetig sind.

Aufgabe 83.13. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M. Es seien $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ und $\tau \in \mathcal{E}^\ell(M)$ Differentialformen auf M. Zeige die Gleichung

$$\varphi^*(\omega \wedge \tau) \,=\, \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau.$$

Aufgabe 83.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, z \neq 0\} \, ,$$
$$(u,v,w) \longmapsto (uvw, u^2 - vw^5, u^2 + v^2 + w^2) \, ,$$

und die 2-Differentialform

$$\omega = z^2 dx \wedge dy + \frac{xy}{z} dx \wedge dz + (xe^y - z) dy \wedge dz$$

auf N. Bestimme die zurückgezogene Differentialform $\varphi^* \omega$.

Aufgabe 83.15. (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der Gleichungskette im Beweis zu Lemma 83.8.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

(1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile
[[/Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).

(2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort
{{:Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Begründungs-

fenster}}
ein.

(3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleich-Zeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.

(4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite(die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort
[[Ihr Benutzername/Differentialform/Zurückziehen/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]
hinschreiben.