Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 1. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad 1. Zeige, dass dann $L = K$ ist.

AUFGABE 2. Beweise die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in K$ für einen Körper K der Charakteristik $\neq 2$.

AUFGABE 3. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es neben der Identität einen weiteren K-Algebra-Homomorphismus $L \longrightarrow L$ gibt.

AUFGABE 4. Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ keine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

AUFGABE 5. Zeige, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige: P besitzt genau dann eine Nullstelle in L, wenn es einen K-Algebra-Homomorphismus $K[X]/(P) \longrightarrow L$ gibt.

AUFGABE 7. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Zeige: f ist genau dann algebraisch über K, wenn $K[f] = K(f)$ ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme das Inverse von $2x^2+3x-1$ im Körper $\mathbb{Q}[X]/(X^3-5)$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $L = K(X)$ der rationale Funktionenkörper über K. Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ einen Ringhomomorphismus $L \longrightarrow L$ gibt derart, dass $L \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass ein Polynom $P \in K[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn das um $a \in K$ „verschobene“ Polynom (das entsteht, wenn man in P die Variable X durch $X-a$ ersetzt) irreduzibel ist.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Formuliere und beweise das „verschobene Eisensteinkriterium“. Man gebe auch ein Beispiel eines Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]$, wo man die Irreduzibilität nicht mit dem Eisensteinkriterium, aber mit dem verschobenen Eisensteinkriterium nachweisen kann.

Aufgabe 12. (6 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Betrachte das Polynom

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X^2 + X + 1\,.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Formuliere und beweise das *umgekehrte Eisensteinkriterium*, bei dem die Rollen des Leitkoeffizienten und des konstanten Koeffizienten vertauscht werden.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Wende eine Form des *Eisensteinkriteriums* an, um die Irreduzibilität der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ nachzuweisen.

(1) $X^4 + 2X^2 + 2$,
(2) $20X^5 - 15X^4 + 125X^3 - 10X + 4$,
(3) $X^4 + 9$.

Abbildungsverzeichnis