Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 10

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 10.1. Ist $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} < \infty$?
Hinweis: Verwende die Tatsache (ohne Beweis), dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Aufgabe 10.2. Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden vier Aussagen äquivalent sind:

(1) $\text{kern } f = \text{kern } f \circ f$
(2) $\text{kern } f \cap \text{bild } f = \{0\}$
(3) $V = \text{kern } f \oplus \text{bild } f$
(4) $\text{bild } f = \text{bild } f \circ f$.

Aufgabe 10.4. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x, y, z) = (x + 2z, y - z, x + y, 2x + 3z)$.

(1) Bestimme die zu f korrespondierende Matrix A. Ist f injektiv?
(2) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Aufgabe 10.5. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0).$$

Berechne die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bzgl. dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 10.6. (4 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme

(1) Rang(A);
(2) eine Basis und die Dimension des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$;
(3) die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Aufgabe 10.7. (4 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$