Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 47

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 47.1. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
(2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bzgl. einer Basis ist invertierbar.
(3) Die Bilinearform ist vom Typ $(p, n-p)$ (mit einem $p \in \{1, \ldots, n\}$.)

Aufgabe 47.2. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ $(n-q, q)$ auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bzgl. dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von $\det G$ gleich $(-1)^q$ ist.

Aufgabe 47.3. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 47.4. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 47.5. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^3 - xy + y^2,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 47.6. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x\,,$$

im Nullpunkt $(0, 0)$.

Aufgabe 47.7. Notiere das Taylor-Polynom für eine Funktion in 2 oder 3 Variablen für den Grad $k = 1, 2, 3$.

In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen. Es sei $k = \sum_{j=1}^{n} r_j$. Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten*.

Aufgabe 47.8. In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wieviele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

Aufgabe 47.9. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} r_j = k$. Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$

bei denen das Urbild zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ aus genau r_i Elementen besteht, gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 47.10. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} r_j = k$. Zeige, dass die Anzahl der k-Tupel

$$(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k,$$

in denen die Zahl i genau r_i-mal vorkommt, gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 47.11. Zeige, dass die Anzahl der (geordneten) Partititonen zum Anzahltupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ einer k-elementigen Menge gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 47.12. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Beweise den *Polynomialsatz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\, \sum_{i=1}^n r_i = k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} \,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.13. (3 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 47.14. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0,0,0)$.

Aufgabe 47.15. (5 Punkte)

Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto xy^3 - x^2 \ln z,$$

im Punkt $(0,2,3)$.

Aufgabe 47.16. (5 Punkte)

Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2y - xy^2 + x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 47.17. (5 Punkte)

Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylorpolynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.