Dipl.-Math. A. Kaid **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Ferienblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-n^2-n+2}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-\sqrt{n}+1}$,
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

Aufgabe 3.2. Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{5^n} = \frac{45}{14}$.

Aufgabe 3.3. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweise den folgenden Satz (Verdichtungskriterium von Cauchy): Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$ konvergiert.

Aufgabe 3.4. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+(-2)^n} z^n .$$

Aufgabe 3.5. Bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

Aufgabe 3.6. Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\cdot |\, x\,|$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bestimme (falls möglich) die Ableitung.

Aufgabe 3.7. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^3-4x^2+8x-8)\cdot e^x .$$

Aufgabe 3.8. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeige, dass

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

Aufgabe 3.9. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wir definieren $T_\epsilon(M) := \{x \in \mathbb{R} :\mid x - a \mid > \epsilon$ für alle $a \in M\}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Falls M offen ist, so ist $T_\epsilon(M)$ abgeschlossen.
(2) Falls M abgeschlossen ist, so ist $T_\epsilon(M)$ offen.
(3) Die Umkehrungen der ersten beiden Aussagen sind falsch.

Aufgabe 3.10. Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion derart, dass der Grenzwert $a := \lim_{x\to\infty} f'(x)$ existiert. Zeige, dass dann auch $\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = a$ gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.11. (4 Punkte)

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

Aufgabe 3.12. (4 Punkte)

Zeige $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3.13. (4 Punkte)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweise den folgenden Satz (Satz von Olivier): Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert, dann ist $(n \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 3.14. (4 Punkte)

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) z^n$.

Aufgabe 3.15. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1}$.

Aufgabe 3.16. (5 Punkte)

Untersuche die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mid (x+1)^3(x-1) \mid$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bestimme (falls möglich) die Ableitung.

Aufgabe 3.17. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + e^x$ bijektiv ist und berechne $(f^{-1})'(1)$.