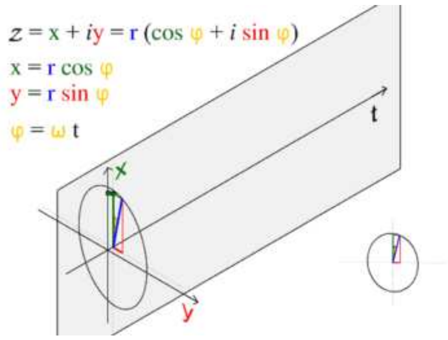
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 40

Differenzierbare Kurven



Eine Animation des Graphen der trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises. Die grünen Punkte sind Punkte des Graphen.

Es sei I ein reelles Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$f: I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir auch eine *Kurve* oder einen *Weg* in V. Häufig stellt man sich dabei I als ein Zeitintervall und die Abbildung als einen Bewegungsprozess im Raum V vor. Jedem Zeitpunkt $t \in I$ wird also ein Ortspunkt $f(t) \in V$ zugeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sich eine solche Abbildung zu veranschaulichen. Bei eindimensionalem V, also $V = \mathbb{R}$, ist der Graph die übliche Darstellungsweise. Einen Graphen gibt es bekanntlich zu jeder Abbildung. Bei $V \cong \mathbb{R}^2$ ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Häufig skizziert man bei einer Kurve bei $V = \mathbb{R}^2$ oder $V = \mathbb{R}^3$ nur das Bild der Kurve. Man beachte aber, dass das Bild nur eine Teilinformation der Abbildung aufzeigt.

Bei einem Bewegungsprozess interessiert man sich natürlich für die „Geschwindigkeit“ zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei versteht man unter Geschwindigkeit nicht nur deren Betrag, sondern auch deren Richtung. Diese Vorstellung wird durch den Begriff der differenzierbaren Kurve präzisiert, der eine direkte Verallgemeinerung von differenzierbaren Funktionen ist. Die Idee ist wieder, zu zwei Zeitpunkten $t < t'$ die Steigung der Sekante (die wir wieder den *Differenzenquotienten* nennen)

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \in V$$

und davon den Limes für $t' \mapsto t$ zu betrachten. Um einen Limes bilden zu können, brauchen wir, wie schon im Eindimensionalen, eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf V. Wir werden daher euklidische Vektorräume betrachten, also reelle endlichdimensionale Vektorräume, für die ein Skalarprodukt erklärt ist. Für den Begriff des Skalarprodukt siehe die 18. Vorlesung aus dem ersten Semester. Ein Skalarprodukt auf V definiert über

$$|| v || := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm und über

$$d(u,v) := || u - v ||$$

eine Metrik. Für einen Vektor v, der bzgl. einer Orthonormalbasis durch die Koordinaten

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

gegeben ist, lautet die Formel für die Norm

$$|| v || = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}\,.$$

Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ und damit eine dadurch induzierte bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto v_i,$$

gibt, gibt es auch auf jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ein Skalarprodukt und damit eine euklidische Metrik. Diese hängt jedoch von der gewählten Basis ab. Allerdings hängen die offenen Mengen, der Konvergenzbegriff und Grenzwerteigenschaften nicht von einer solchen Wahl ab, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 40.1. *Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien zwei Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_1$ und $\langle -, - \rangle_2$ auf V gegeben. Dann stimmen die über die zugehörigen Normen $|| - ||_1$ und $|| - ||_2$ definierten Topologien überein, d.h. eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bzgl. der einen Metrik, wenn sie offen bzgl. der anderen Metrik ist.*

Beweis. Zu einem Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gibt es eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$. Eine solche Orthonormalbasis definiert eine bijektive lineare Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto u_i,$$

die eine Isometrie ist. Insbesondere ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann offen, wenn die entsprechende Menge $\psi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Die zwei vorgegebenen Skalarprodukte entsprechen zwei bijektiven linearen Abbildungen $\psi_1 : \mathbb{R}^n \to V$ und $\psi_2 : \mathbb{R}^n \to V$, wobei die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ jeweils auf eine Orthonormalbasis bzgl. des jeweiligen Skalarprodukts abgebildet wird. Diese Abbildungen sind Isometrien, so dass eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann bzgl. des Skalarproduktes $\langle -,-\rangle_i$ offen ist, wenn dass Urbild $(\psi_i)^{-1}(U)$ offen im $\mathbb{R}^n$ bzgl. der euklidischen Standardmetrik ist. Die Verknüpfungen

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sind lineare Abbildungen und nach Satz 20.11 stetig, so dass sich die offenen Mengen entsprechen: Ist nämlich $U \subseteq V$ offen bzgl. der ersten Metrik, so ist $\psi_1^{-1}(U)$ offen und damit ist wegen der Stetigkeit von $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ auch

$$(\psi_1^{-1} \circ \psi_2)^{-1}(\psi_1^{-1}(U)) \;=\; \psi_2^{-1}(\psi_1(\psi_1^{-1}(U)) \;=\; \psi_2^{-1}(U)$$

offen, so dass U auch bzgl. der zweiten Metrik offen ist. $\square$

Für uns bedeutet das, dass die im Folgenden zu entwickelnden Differenzierbarkeitsbegriffe nicht vom gewählten Skalarprodukt abhängt. Mit etwa mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass eine beliebige (nicht notwendigerweise euklidische) Norm auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ebenfalls die gleiche Topologie definiert, und man genauso gut mit einer beliebigen Norm arbeiten könnte. Wenn wir es mit komplexen endlichdimensionalen Vektorräumen zu tun haben, so werden wir diese einfach als reelle Vektorräume (der doppelten Dimension) auffassen und ebenfalls mit einer euklidischen Norm versehen.

Definition 40.2. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f in $t \in I$ *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\mathrm{lim}_{h\to 0}\ \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt dann die *Ableitung* von f in t und wird mit

$$f'(t)$$

bezeichnet.

Die Ableitung ist selbst wieder ein Vektor in V.

Definition 40.3. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V,\ t \longmapsto f'(t),$$

heißt dann die *Ableitung* von f.

Die Ableitung einer differenzierbaren Kurve ist damit selbst wieder eine Kurve. Wenn die Ableitung stetig ist, so nennt man die Kurve *stetig differenzierbar.*

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff nichts wesentlich neues ist, da er auf die Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

Lemma 40.4. *Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Es sei v_j, $j \in J$, eine Basis von V und es seien

$$f_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Komponentenfunktionen von f. Es sei $t \in I$. Dann ist f genau dann differenzierbar in t, wenn sämtliche Funktionen f_j in t differenzierbar sind. In diesem Fall gilt (bei $J = \{1, 2, \ldots, n\}$)

$$f'(t) = f_1'(t)v_1 + f_2'(t)v_2 + \ldots + f_n'(t)v_n \, .$$

Beweis. Sei $t_0 \in I$ und $t \in I$, $t \neq t_0$. Es ist

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\sum_{j=1}^n f_j(t)v_j - \sum_{j=1}^n f_j(t_0)v_j}{t - t_0} = \sum_{j=1}^n \frac{f_j(t) - f_j(t_0)}{t - t_0} v_j .$$

Nach Aufgabe 40.8 existiert der Limes links für $t \to t_0$ genau dann, wenn der entsprechende Limes rechts komponentenweise existiert. $\square$

Beispiel 40.5. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, t \longmapsto (t^2 - t^3, t \cdot \sin t \, , e^{-t})$$

ist in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und zwar ist

$$f'(t) = (2t - 3t^2, \sin t \, + t \cdot \cos t \, , -e^{-t}) \, .$$

Lemma 40.6. *Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien*

$$f, g : I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Summe*

$$f + g : I \longrightarrow V, \, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) \, .$$

(2) *Das Produkt*

$$hf : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto h(t) \cdot f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0) \cdot f'(t_0) + h'(t_0) \cdot f(t_0)\,.$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0)\,.$$

(3) *Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion*

$$\frac{f}{h} : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$(\frac{f}{h})'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 40.4. □

Man kann natürlich zwei Abbildungen $f, g : I \to V$ nicht miteinander multiplizieren, so dass in der obigen Produktregel eine differenzierbare Kurve und eine differenzierbare Funktion auftritt. Ebenso muss die Kettenregel mit Bedacht formuliert werden. Später werden wir noch eine allgemeinere Kettenregel kennenlernen.

Lemma 40.7. *Es seien I und J zwei reelle Intervalle, es sei*

$$h : I \longrightarrow J,\ s \longmapsto h(s),$$

eine in $s_0 \in I$ differenzierbare Funktion und es sei

$$f : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto f(t),$$

eine in $t_0 = h(s_0)$ differenzierbare Kurve in einen euklidischen Vektorraum V. Dann ist auch die zusammengesetzte Kurve

$$f \circ h : I \longrightarrow V,\ s \longmapsto f(h(s)),$$

in s_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(s_0) \ = \ h'(s_0) \cdot f'(h(s_0)).$$

Beweis. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ die Komponentenfunktionen von f bzgl. einer Basis von V. Nach der Kettenregel in einer Variablen gilt

$$(f_i \circ h)'(s_0) \ = \ h'(s_0) \cdot f_i'(h(s_0))$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$. Dies ist wegen Lemma 40.4 die Behauptung. □

Lemma 40.8. *Es sei I ein reelles Intervall, V und W seien euklidische Vektorräume und es sei*

$$f : I \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Kurve. Es sei

$$L : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ f : I \longrightarrow W,\ t \longmapsto L(f(t)),$$

differenzierbar und es gilt

$$(L \circ f)'(t) \,=\, L(f'(t)).$$

Beweis. Sei $t_0 \in I$ fixiert und sei $t \in I$, $t \neq t_0$. Wegen der Linearität ist

$$L(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}) \,=\, \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0}.$$

Wegen der Voraussetzung und der Stetigkeit einer linearen Abbildung existiert der Limes links für $t \to t_0$, also existiert auch der Limes rechts, und das bedeutet, dass der Differentialquotient der zusammengesetzten Abbildung $L \circ f$ existiert. □

Abbildungsverzeichnis