Fachbereich Mathematik/Informatik **29. März 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Reelle und angewandte Analysis (Mathematik III)

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregel, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkäre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer per Aushang oder im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	5	3	7	3	3	10	7	7	3	8	64
erhaltene Pkt.:													

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *positive Teil* einer Funktion
$$f : M \longrightarrow \mathbb{R},$$
wobei M eine Menge bezeichnet.
(2) Das *Bildmaß* unter einer messbaren Abbildung
$$\varphi : M \longrightarrow N$$
von einem Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$ in einen Messraum $(N, \mathcal{B})$.
(3) Ein *translationsinvariantes* Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
(4) Der *Limes superior* zu einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(5) Ein *(überdeckungs)kompakter* topologischer Raum.
(6) Zwei in einem Punkt $P \in M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M *tangential äquivalente* differenzierbare Kurven
$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$
(dabei sei $0 \in I$ ein offenes reelles Intervall und $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$).
(7) Die *zurückgezogene Differentialform* $\varphi^*\omega$ zu einer Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ bezüglich einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : L \to M$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M.
(8) Die *kanonische Volumenform* auf einer orientierten riemannschen Mannigfaltigkeit M.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Das *Lemma von Fatou.*
(2) Die *Transformationsformel für Integrale* zu einem C^1-Diffeomorphismus
$$\varphi : G \longrightarrow H,$$
wobei G und H offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind.
(3) Die *Formel für die zurückgezogene Volumenform* $\varphi^*\omega$ zu $\omega = f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ unter einer stetig differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
(4) Der *Satz von Stokes* für Mannigfaltigkeiten mit Rand.

Aufgabe 3. (5 (2+2+1) Punkte)

Die Grundfläche eines Kochtopfes sei eine Kreisscheibe mit Radius 13 cm, der Topf sei 10 cm hoch und auf die Höhe von $7,7$ cm mit Wasser gefüllt. Eine Kartoffel wird in den Topf geworfen und taucht voll unter, wobei das Wasser auf eine Höhe von $8,8$ cm ansteigt.

a) Berechne das Volumen der Kartoffel (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen).

b) Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

c) Handelt es sich um eine große oder um eine kleine Kartoffel?

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Es sei X ein Messraum und es sei

$$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von messbaren Funktionen, wobei $\mathbb{R}$ die σ-Algebra der Borelmengen trägt. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \in X | \, a \text{ ist ein Häufungspunkt der Folge } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}$$

eine messbare Teilmenge von X ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) = s^2 t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$.

Aufgabe 7. (3 (2+1) Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ repräsentieren.

b) Wie muss man x wählen, damit diese drei Vektoren die der Standardorientierung entgegengesetzte Orientierung repräsentieren.

Aufgabe 8. (10 (2+8) Punkte)

Sei

$$S = \{P \in \mathbb{R}^3 | \; || P ||= 1\}$$

die Einheitssphäre. Zu $v = (a, b, c) \neq 0$ ist

$$E_v = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, ax + by + cz = 0\}$$

eine Ebene durch den Nullpunkt, die einen Großkreis (einen „Äquator") und zwei offene Halbsphären auf S definiert.

a) Beschreibe zu $v = (a, b, c) \neq 0$ den zugehörigen Großkreis und die beiden Halbsphären mit Gleichungen bzw. mit Ungleichungen.

b) Zeige, dass man S nicht mit drei offenen Halbsphären überdecken kann.

Aufgabe 9. (7 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $P \in M$ ein Punkt. Es sei $0 \in I$ ein offenes reelles Intervall und es seien

$$\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow M$$

zwei differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$. Zeige, dass γ_1 und γ_2 genau dann *tangential äquivalent* in P sind, wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $P \in U$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ die Gleichheit

$$(\alpha \circ (\gamma_1|_{\gamma_1^{-1}(U)}))'(0) \; = \; (\alpha \circ (\gamma_2|_{\gamma_2^{-1}(U)}))'(0)$$

gilt.

Aufgabe 10. (7 (2+3+2) Punkte)

Wir betrachten die differenzierbaren Abbildungen

$$\gamma : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t, t^{-1}),$$

und

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^2, uv, -u+v^2),$$

und die Differentialform

$$\omega = xdx - zdy + dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

a) Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ auf dem $\mathbb{R}^2$.

b) Berechne das Wegintegral zur Differentialform $\varphi^*\omega$ zum Weg γ.

c) Berechne (ohne Bezug auf b)) das Wegintegral zur Differentialform ω zum Weg $\varphi \circ \gamma$.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Berechne die äußere Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega = e^{xz} dx \wedge dy - xyz dx \wedge dz + (\sin(\cos(xy)) + y^{10} z^{100}) dy \wedge dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 12. (8 Punkte)

Beweise den Satz von Green für ein Dreieck D mit den Eckpunkten $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ und für die Differentialform xdy.