Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 19.1. Bestimme für $n \leq 12$, welche der n-ten Einheitswurzeln in K_n zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 19.2. Bestimme für $n \leq 12$, wie viele Unterkörper der n-te Kreisteilungskörper K_n besitzt und wie viele davon selbst Kreisteilungskörper sind.

Aufgabe 19.3. Zeige, dass das Kompositum K_1K_2 zu zwei Körpererweiterungen $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$ vom gewählten Oberkörper abhängen kann.

Aufgabe 19.4. Es seien $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$ zwei Körpererweiterungen vom Grad d_1 bzw. d_2. Es sei K_1K_2 das in einem Oberkörper gebildete Kompositum. Zeige, dass die Abschätzung $\operatorname{grad}_K K_1K_2 \leq d_1d_2$ gilt.

Aufgabe 19.5. Es sei K ein Körper und es seien $K \subseteq K_1 \cong K[X]/F(X)$ und $K \subseteq K_2 \cong K[Y]/G(Y)$ zwei endliche einfache Körpererweiterungen von K.

a) Zeige, dass die K-Algebra $A = K[X,Y]/(F,G)$ kein Körper sein muss.

b) Es sei K_1K_2 das in einem gemeinsamen Oberkörper gebildete Kompositum. Zeige, dass es einen surjektiven K-Algebra-Homomorphismus von A nach K_1K_2 gibt.

Aufgabe 19.6. Es sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_{q_1}$ der Körper mit $q_1 = p^{e_1}$ und $\mathbb{F}_{q_2}$ der Körper mit $q_2 = p^{e_2}$ Elementen. Zeige, dass das Kompositum (unabhängig vom gewählten Oberkörper) von $\mathbb{F}_{q_1}$ und $\mathbb{F}_{q_2}$ gleich $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^e$ und $e = \operatorname{kgV}(e_1, e_2)$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.7. (3 Punkte)

Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige die Abschätzung

$$\varphi(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Aufgabe 19.8. (4 Punkte)

Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper, $n \geq 3$. Zeige, dass es einen Zwischenkörper L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K_n$, gibt, der eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 19.9. (2 Punkte)

Es seien K_{n_1} und K_{n_2} zwei Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass das Kompositum (unabhängig vom gewählten Oberkörper) von K_{n_1} und K_{n_2} gleich K_n ist, wobei $n = \operatorname{kgV}(n_1, n_2)$ ist.

Aufgabe 19.10. (3 Punkte)

Es seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass das n-te Kreisteilungspolynom über dem m-ten Kreisteilungskörper K_m irreduzibel ist.

Aufgabe 19.11. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $K \subseteq K(\zeta)$ die Adjunktion einer n-ten primitiven Einheitswurzel. Zeige mit Hilfe von Satz 19.6 und der Theorie der Kreisteilungskörper (über $\mathbb{Q}$), dass $K \subseteq K(\zeta)$ eine Galoiserweiterung ist, deren Galoisgruppe abelsch ist.

Aufgabe 19.12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien $K \subseteq K_1 \cong K[X]/F(X)$ und $K \subseteq K_2 \cong K[Y]/G(Y)$ zwei endliche einfache Körpererweiterungen von K, deren Grade teilerfremd seien. Zeige, dass die K-Algebra $A = K[X,Y]/(F,G)$ ein Körper ist.

Aufgabe 19.13. (7 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei F_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $F_n \leq F_{n+1}$.