

Mathematik für Anwender II**Arbeitsblatt 31****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 31.1. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

AUFGABE 31.2. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

AUFGABE 31.3. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\| - \|$. Zeige, dass die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.

AUFGABE 31.4. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\| - \|$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

gilt.

AUFGABE 31.5. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u, v, w \in V$).

- (1) Es ist $d(v, w) \geq 0$.
- (2) Es ist $d(v, w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
- (3) Es ist $d(v, w) = d(w, v)$.
- (4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

AUFGABE 31.6. Der \mathbb{R}^3 sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U .

AUFGABE 31.7. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension n . Zeige, dass eine Vektorfamilie $u_1, \dots, u_n \in V$ genau dann eine Orthonormalbasis von V ist, wenn die zugehörige lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

eine Isometrie zwischen \mathbb{R}^n und V ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 31.8. (2 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Beweise den *Satz des Pythagoras*: Für zwei Vektoren $v, w \in V$, die senkrecht aufeinander stehen, gilt die Beziehung

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 .$$

AUFGABE 31.9. (3 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 , versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

AUFGABE 31.10. (4 Punkte)

Der \mathbb{R}^4 sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U .

AUFGABE 31.11. (3 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei $u_1, \dots, u_n \in V$ eine Orthonormalbasis von V . Zeige, dass für jeden Vektor $v \in V$ die Beziehung

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i \rangle u_i$$

gilt.

AUFGABE 31.12. (6 Punkte)

Sei V ein euklidischer Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (1) φ ist eine Isometrie.
- (2) Für jeden Vektor v mit $\|v\| = 1$ ist auch $\|\varphi(v)\| = 1$.
- (3) Für jede Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \dots, n$, ist auch $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$, eine Orthonormalbasis.
- (4) Es gibt eine Orthonormalbasis $u_i, i = 1, \dots, n$, derart, dass auch $\varphi(u_i), i = 1, \dots, n$, eine Orthonormalbasis ist.

AUFGABE 31.13. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, die keine Isometrie ist, für die aber für alle $u, v \in V$ die Beziehung

$$\langle u, v \rangle = 0 \text{ genau dann, wenn } \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = 0$$

gilt.