Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Was bedeutet das linke Bild auf der Kursseite?

Aufgabe 2. Berechne für die Permutation

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	7	3	1	4	8	6

die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen.

Sei G eine Gruppe. Zwei Elemente $g, h \in G$ heißen *vertauschbar*, wenn $gh = hg$ gilt.

Aufgabe 3. Zeige, dass zwei Permutationen mit disjunktem Wirkungsbereich vertauschbar sind.

Aufgabe 4. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 6. Für welche $n \in \mathbb{N}$ lässt sich G realisieren als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n?

Aufgabe 5. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_σ ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\sigma(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge null sind. Zeige, dass

$$\det(M_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} : \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}_x \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\operatorname{ord} \sigma = \operatorname{kgV}\{\operatorname{ord}_x \sigma : x \in M\}.$$

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Zeige, dass die (eigentliche) Würfelgruppe isomorph zur Permutationsgruppe S_4 ist.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Sei $G = \mathbb{Z}/(n)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Bestimme für jedes Element $g \in G$ das Signum der zugehörigen Permutation (der Addition mit g).

(Vergleiche hierzu Beispiel 9.15)

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Für eine Gruppe G bezeichne $T(G)$ die Menge aller Elemente mit endlicher Ordnung in G. Zeige folgende Aussagen.

(1) Ist G abelsch, so ist $T(G)$ eine Untergruppe von G.
(2) Ist $T(G)$ eine Untergruppe, so ist $T(G)$ ein Normalteiler in G.
(3) Es gibt eine Gruppe G, für die $T(G)$ keine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Sei σ ein Zykel der Ordnung n. Zeige, dass man σ als Produkt von $n-1$ Transpositionen schreiben kann, aber nicht mit einer kleineren Anzahl von Transpositionen.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei $m \geq n$. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, m\}$ und wie viele surjektiven Abbildungen gibt es von $\{1, \dots, m\}$ nach $\{1, \dots, n\}$?

Für die nächste Vorlesung empfehlen wir, sich an die Begriffe *Skalarprodukt* und *euklidischer Vektorraum* zu erinnern, siehe die Kursseite unter "weitere Materialien".