Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 20

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Dann ist $\{1+x : x \in I\}$ ein multiplikatives System in R.

Aufgabe 2. Sei R ein Integritätsbereich und sei $0 \neq p \in R$ keine Einheit. Dann ist p genau dann ein Primelement, wenn das von p erzeugte Ideal $(p) \subset R$ ein Primideal ist.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{p}$ ein Ideal. Genau dann ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, wenn der Restklassenring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 4. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ und der Polynomring in zwei Variablen $K[X, Y]$ über einem Körper K keine Hauptidealbereiche sind.

Aufgabe 5. Man mache sich anhand des Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C},\ X \longmapsto i,$$

klar, dass die Anzahl der Primideale in $K[X]$ stark vom Grundkörper K abhängt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei R ein faktorieller Bereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Zeige, dass jedes Element $f \in K$, $f \neq 0$, eine im Wesentlichen eindeutige Produktzerlegung

$$f = up_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$$

mit einer Einheit $u \in R$ und ganzzahligen Exponenten r_i besitzt.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei R ein faktorieller Bereich mit Quotientenkörper $K = Q(R)$. Es sei $a \in K$ ein Element mit $a^n \in R$ für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ Zeige, dass dann schon a zu R gehört.

Was bedeutet dies für $R = \mathbb{Z}$?

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Sei R ein faktorieller Bereich. Zeige, dass jedes von null verschiedene Primideal ein Primelement enthält.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem kommutativen Ring R. Zeige, dass $\mathfrak{a}$ ein Primideal ist genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\varphi : R \to K$ in einen Körper K ist.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff des maximalen Ideals.

Ein Ideal $\mathfrak{m}$ in einem kommutativen Ring R heißt *maximales Ideal*, wenn $\mathfrak{m} \neq R$ ist und wenn es zwischen $\mathfrak{m}$ und R keine weiteren Ideale gibt.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{a} \neq R$ ein Ideal in R. Zeige: $\mathfrak{a}$ ist ein maximales Ideal genau dann, wenn es zu jedem $g \in R$, $g \notin \mathfrak{a}$, ein $f \in \mathfrak{a}$ und ein $r \in R$ gibt mit $rg + f = 1$.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Zeige, dass I genau dann ein maximales Ideal ist, wenn der Restklassenring R/I ein Körper ist.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R hat genau ein maximales Ideal
(2) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^{\times}$ bildet ein Ideal in R.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Seien R und S kommutative Ringe und sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in S. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in R ist.

Zeige durch ein Beispiel, dass das Urbild eines maximalen Ideales kein maximales Ideal sein muss.