Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 13

Invertierbare Matrizen

Definition 13.1. Die $n \times n$-Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Einheitsmatrix*.

Definition 13.2. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A \, .$$

Definition 13.3. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1} \, .$$

Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen wird mit

$$\operatorname{GL}_n(K)$$

bezeichnet. Diese Menge ist mit der Multiplikation von Matrizen, der n-ten Einheitsmatrix als neutralem Element und der inversen Matrix, die eindeutig bestimmt ist, eine Gruppe. Sie heißt die *allgemeine lineare Gruppe*.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Definition 13.4. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij}$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bzgl. der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \mapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 12.3 definierte lineare Abbildung $\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$ die *durch* M *festgelegte lineare Abbildung.*

Satz 13.5. *Es sei* K *ein Körper und sei* V *ein* n*-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis* $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ *und sei* W *ein* m*-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis* $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. *Dann sind die in der Definition festgelegten Zuordnungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Wir zeigen, dass die beiden Hintereinanderschaltungen die Identität ist. Wir starten mit einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ und betrachten die Matrix

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)) .$$

Zwei Matrizen sind gleich, wenn für jedes Indexpaar (i, j) die Einträge übereinstimmen. Es ist

$$\begin{aligned} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)))_{ij} &= i - \text{Koordinate von } (\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M))(v_j) \\ &= i - \text{Koordinate von } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Sei nun φ eine lineare Abbildung, und betrachten wir

$$\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)) .$$

Diese zwei linearen Abbildungen stimmen überein, wenn man zeigen kann, dass sie auf der Basis $v_1, \ldots, v_n$ übereinstimmen. Es ist

$$(\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)))(v_j) = \sum_{i=1}^{m} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))_{ij} \, w_i.$$

Dabei ist nach Definition der Koeffizient $(M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi))_{ij}$ die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bzgl. der Basis $w_1, \ldots, w_m$. Damit ist diese Summe gleich $\varphi(v_j)$. $\square$

Beispiel 13.6. Eine lineare Abbildung
$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$
wird zumeist durch die Matrix M bzgl. den Standardbasen links und rechts beschrieben. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
ist dann direkt als Punkt in K^m interpretierbar. Die j-te Spalte von M ist das Bild des j-ten Standardvektors e_j.

Lemma 13.7. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*
$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m\,.$$
Es seien
$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$
lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung
$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}}(\varphi \circ \psi) = (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)) \circ (M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}(\psi))\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungskette
$$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W\,.$$
Bzgl. den Basen werde ψ durch die $n \times p$-Matrix $B = (b_{jk})_{jk}$ und φ durch die $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ beschrieben. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ wirkt auf einen Basisvektor u_k folgendermaßen.
$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(u_k) &= \varphi(\psi(u_k)) \\ &= \varphi(\sum_{j=1}^n b_{jk} v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk} \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{jk} (\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i) \\ &= \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) w_i \\ &= \sum_{i=1}^m c_{ik} w_i. \end{aligned}$$

Dabei sind diese Koeffizienten $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. $\square$

Lemma 13.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
(2) *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
(3) *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i \, .$$

Daher ist

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i) \;=\; \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}) w_i.$$

Dies ist genau dann null, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ ist für alle i, und dies ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0$. Dafür gibt es ein nichttrivales (Lösungs)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 13.7. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_W \;\text{ und }\; \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V \, .$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 13.7 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M \, .$$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. $\square$

Basiswechsel

Lemma 13.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ zwei Basen von V. Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor v, der bzgl. der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ besitzt, bzgl. der Basis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{j=1}^{n} a_j (\sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_j c_{ij}) u_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Man kann diese Aussage auch so auffassen: Zu den beiden Basen gehören die bijektiven linearen Abbildungen

$$\psi_{\mathfrak{v}} : K^n \longrightarrow V \text{ und } \psi_{\mathfrak{u}} : K^n \longrightarrow V$$

(die jeweils die Standardvektoren auf die Basisvektoren schicken). Dann ist

$$(\psi_{\mathfrak{u}})^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}} : K^n \longrightarrow K^n$$

ebenfalls eine bijektive lineare Abbildung, und diese wird bzgl. der Standardbasis durch $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ beschrieben.

Lemma 13.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bzgl. den Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}} \circ (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi)) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ und $M_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{w}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Die linearen Standardabbildungen $K^n \to V$ bzw. $K^m \to W$ zu den Basen seien mit $\psi_{\mathfrak{v}}$, $\psi_{\mathfrak{u}}$, $\psi_{\mathfrak{w}}$, $\psi_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet. Wenn man die beschreibende Matrix als lineare Abbildung zwischen den Standardräumen auffasst, so ergibt sich die Beziehung

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}} \,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{z}}(\varphi) &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ (\psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}})^{-1} \\ &= M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 13.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bzgl. $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{u}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{u}}(\varphi) = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1} \,.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 13.10. □

Es ist ein wichtiger Aspekt, zu einer gegebenen linearen Abbildung eines Vektorraumes in sich selbst eine Basis zu finden, bzgl. der die beschreibende Matrix möglichst einfach wird. Dieses Problem ist äquivalent damit, zu einer quadratischen Matrix M eine invertierbare Matrix A zu finden derart, dass AMA^{-1} möglichst einfach ist.

Elementarmatrizen

Definition 13.12. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen.*

(1) Vertauschung von zwei Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
(3) Addition des a-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 10.22 gezeigt wurde.

Satz 13.13. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \ldots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

bringen.

Beweis. Dies beruht auf den gleichen Manipulationen wie beim Eliminationsverfahren, siehe 10.23. □

Definition 13.14. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert null hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen.*

(1) $V_{ij} = E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k = E_n + (s - 1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & s & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & a & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

Lemma 13.15. *Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann hat die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

(1) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ *Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile.*
(2) $(S_k(s))) \circ M =$ *Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.*
(3) $V_{ij} \circ M =$ *Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.8. □

Verfahren 13.16. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Hälfte zunächst die Matrix M steht und in der rechten Hälfte die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Hälfte die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Hälfte die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist) der linken Hälfte mit der rechten Hälfte multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}E^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$E_n^{-1}N \,=\, E_nN \,=\, N \,=\, M^{-1}.$$

Beispiel 13.17. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in 13.16 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$