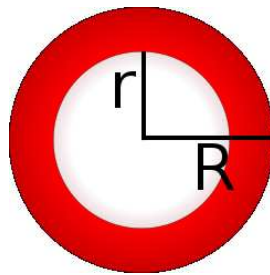


**Mathematik III****Arbeitsblatt 75****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 75.1. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.



AUFGABE 75.2. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.

AUFGABE 75.3. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y)$$

flächentreu ist.

**Aufgaben zum Abgeben**

AUFGABE 75.4. (5 Punkte)

Es sei  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum, es sei

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare nichtnegative integrierbare Funktion und sei  $g\mu$  das Maß zur Dichte  $g$ . Zeige, dass für jede messbare Funktion

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$\int_M f d(g\mu) = \int_M fg d\mu$$

gilt.

## AUFGABE 75.5. (5 Punkte)

Es seien  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(N, \mathcal{B}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume, und es seien

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare nichtnegative integrierbare Funktionen mit den zu diesen Dichten gehörigen Maßen  $g\mu$  und  $h\nu$ . Zeige, dass auf  $M \times N$  das Produktmaß  $(g\mu) \otimes (h\nu)$  mit dem Maß zur Dichte

$$gh : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x)h(y),$$

bezüglich  $\mu \otimes \nu$  übereinstimmt.

## AUFGABE 75.6. (4 Punkte)

Berechne den Wert des Quadrats  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leq 1\}$  für das Bildmaß  $\mu = \varphi_*\lambda^2$  unter der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

## AUFGABE 75.7. (7 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

- a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graph) untereinander überschneidungsfrei sind.
- b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.
- c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Annulus.svg, Autor = Benutzer Nandhp auf Commons, Lizenz  
= PD 1