Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Überprüfe, dass die reguläre Darstellung in der Tat ein Gruppenhomomorphismus ist. Wie sieht es aus, wenn man die reguläre Darstellung mit der Rechtsmultiplikation statt mit der Linksmultiplikation definiert?

Aufgabe 3.2. Zeige, dass jede endliche Gruppe eine treue Darstellung innerhalb der speziellen linearen Gruppe besitzt.

Aufgabe 3.3. Finde treue Darstellungen für $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.4. Finde treue Darstellungen für $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3.5. Es sei K ein Körper und $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine zyklische Untergruppe, die von $\varphi \in \mathrm{GL}_n(K)$ erzeugt werde. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq K^n$ genau dann G-invariant ist, wenn er φ-invariant ist.

Aufgabe 3.6. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Bestimme die Anzahl der Elemente in
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) .$$

Aufgabe 3.7. Es sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper. Bestimme die Anzahl der Elemente in
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) .$$

Aufgabe 3.8. Berechne die Ordnung der Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 3.9. Sei G eine Gruppe, K ein Körper und $G^\vee = \operatorname{Char}(G, K)$ die Charaktergruppe zu G. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) $G^\vee$ ist eine kommutative Gruppe.
(2) Bei einer direkten Gruppenzerlegung $G = G_1 \times G_2$ ist $(G_1 \times G_2)^\vee = G_1^\vee \times G_2^\vee$.

Aufgabe 3.10.*

Es seien D_1 und D_2 kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper K.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus
$$\varphi\colon\ D_1 \longrightarrow D_2$$
durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus
$$\varphi^\vee\colon\ D_2^\vee \longrightarrow D_1^\vee$$
definiert wird.
(2) Es sei D_3 eine weitere kommutative Gruppe und sei
$$\psi\colon\ D_2 \longrightarrow D_3$$
ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit
$$(\psi \circ \varphi)^\vee \ =\ \varphi^\vee \circ \psi^\vee.$$

Aufgabe 3.11. Es sei D eine kommutative Gruppe und K ein Körper.

a) Zeige, dass durch
$$D \longrightarrow (D^\vee)^\vee,\ d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d)),$$
ein natürlicher Gruppenhomomorphismus von D in das Doppeldual $(D^\vee)^\vee$ gegeben ist.

b) Es sei nun D endlich und es sei vorausgesetzt, dass K eine m-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass dann die Abbildung aus a) ein Isomorphismus ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe auftretende Abbildung ev_d heißt *Evaluierungsabbildung* (zu d).

Aufgabe 3.12. Es sei D eine endliche kommutative Gruppe und es sei K ein Körper. Wir betrachten die Zuordnung
$$E \longmapsto E^\perp = \{\chi \in D^\vee | \, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\} \ ,$$
die einer Untergruppe von D eine Untergruppe von $D^\vee$ zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Die Zuordnung ist inklusionsumkehrend.

b) Unter der kanonischen Abbildung

$$D \longrightarrow (D^\vee)^\vee,\ d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d)),$$

ist $\mathrm{ev}_d(E) \subseteq (E^\perp)^\perp$.

c) Es sei vorausgesetzt, dass K eine m-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass dann $\mathrm{ev}_d(E) = (E^\perp)^\perp$ gilt.

Aufgabe 3.13. Es sei D eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten m, und es sei K ein Körper, der eine primitive m-te Einheitswurzel besitzt. Zeige, dass die Zuordnungen

$$E \longmapsto E^\perp = \{\chi \in D^\vee |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}$$

und

$$H \longmapsto H^\perp = \{d \in D |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } \chi \in H\}$$

(zwischen den Untergruppen von D und den Untergruppen von $D^\vee$) zueinander invers sind.

Aufgabe 3.14. Sei D eine endliche kommutative Gruppe mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^\vee$ in einen Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$D^\vee \longrightarrow K^\times,\ \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.15. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_r(K)$ mit $r \geq 2$, die von zwei Elementen erzeugt wird, die beide als Endomorphismen diagonalisierbar sind, derart, dass die einzigen G-invarianten Untervektorräume 0 und K^r sind.

Aufgabe 3.16. (4 Punkte)

Wir betrachten die natürliche Operation der Permutationsgruppe $G = S_n$ auf K^n.

a) Bestimme den Fixraum F der Operation.

b) Finde ein G-invariantes Komplement, also einen G-invarianten Unterraum $U \subseteq K^n$ mit $F \oplus U = K^n$.

Aufgabe 3.17. (5 Punkte)

Betrachte die Untergruppe

$$G \subset \mathrm{Gl}\,(2, \mathbb{R})\,,$$

die durch die drei Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Liste die Elemente dieser Gruppe auf und bestimme sämtliche Untergruppen.

Aufgabe 3.18. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei D eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten m. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) K besitzt eine m-te primitive Einheitswurzel.
(2) Zu jedem Primpotenzteiler p^r von m besitzt K eine p^r-te primitive Einheitswurzel.
(3) Zu jedem Teiler n von m besitzt K eine n-te primitive Einheitswurzel.
(4) Zu jeder Ordnung n eines Elementes $d \in D$ besitzt K eine n-te primitive Einheitswurzel.

Aufgabe 3.19. (4 (1+3) Punkte)

Es sei D eine endliche kommutative Gruppe und $E \subseteq D$ eine Untergruppe. Es sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der Kern des natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\psi\colon\, D^\vee \longrightarrow E^\vee,\ \chi \longmapsto \chi|_E,$$

gleich $E^\perp$ ist.

b) Es sei vorausgesetzt, dass K eine m-te primitive Einheitswurzel besitzt, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass ψ surjektiv ist.