Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2010

Mathematik II

Arbeitsblatt 39

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 39.1. Skizziere die zugrunde liegenden Vektorfelder der Differentialgleichungen
$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$
sowie die in Beispiel 39.6, Beispiel 39.7 und Beispiel 39.8 angegebenen Lösungskurven.

Aufgabe 39.2. Bestätige die in Beispiel 39.6, Beispiel 39.7 und Beispiel 39.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen
$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$
durch Ableiten.

Aufgabe 39.3. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.4. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = y\,,$$
mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.5. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = e^y\,,$$
mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.6. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = \frac{1}{\sin y}\,,$$
mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.7. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.8. Betrachte die in Beispiel 39.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$.

c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.

d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (Für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*)

e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 39.9. (3 Punkte)

Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit einer stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

auf einem Intervall I' die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$

besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Aufgabe 39.10. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty^2,\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.11. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = t^3 y^3,\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.12. (5 Punkte)

Es sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und es sei

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in I mit dem Grenzwert a und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in I mit dem Grenzwert b. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass die Folge

$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.