Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 2

Aufwärmaufgaben

Bundesarchiv, B 145 Bild-P049547
Foto: Weinrother, Carl | 1933

Aufgabe 2.1. Welche bijektiven Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(oder zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

Aufgabe 2.2. Jedes Paket hat einen eindeutig bestimmten Absender und Empfänger. Modelliere diesen Sachverhalt mit Abbildungen bzw. Relationen. Welche Pfeildiagramme sind sinnvoll, um die Situation zu beschreiben?

Aufgabe 2.3. Wie kann man sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

Aufgabe 2.4. Erstelle eine Tabelle für die Inzidenzrelation zu einer $0, 1, 2$ und 3-elementigen Menge.

Aufgabe 2.5. Beschreibe, wie sich die Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch* und *antisymmetrisch* einer Relation R in der Relationstabelle zu R widerspiegeln.

Aufgabe 2.6. Ein Adventskranz hat vier Kerzen, wobei am ersten Advent genau eine Kerze, am zweiten Advent genau zwei Kerzen usw. brennen sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Adventskranz „abzubrennen“? Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Kerzen, die zuvor schon angezündet waren, wieder angezündet werden sollen, und wie viele, wenn stets so viele neue Kerzen wie möglich angezündet werden?

Aufgabe 2.7. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 2.8. Sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildung vorzustellen (möglichst geometrisch).

(1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bzgl. des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(6) Sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(8) Sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

Aufgabe 2.9. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}\,(M) \longrightarrow \mathfrak{P}\,(L),\; T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

Aufgabe 2.11. (2 Punkte)

Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G : M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die $F \circ G = \mathrm{id}_M$ und $G \circ F = \mathrm{id}_L$ erfüllt. Zeige, dass dann G die Umkehrabbildung von F ist.

Aufgabe 2.12. (3 Punkte)

Es sei M eine n-elementige Menge. Bestimme die Anzahl der Elemente in der Inzidenzrelation zu M.

(In der Antwort dürfen keine Binomialkoeffizienten vorkommen.)

Aufgabe 2.13. (3 Punkte)

Wir betrachten die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und eine fixierte natürliche Zahl $a \geq 0$. Zeige, dass auf $\mathbb{Z}$ durch

$$x \sim y, \text{ wenn die Differenz } x - y \text{ ein Vielfaches von } a \text{ ist},$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Aufgabe 2.14. (3 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 Mengen und $\sim_1$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und $\sim_2$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_2. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt},$$

definiert ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt},$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2.15. (4 Punkte)

Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreibe für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3-Schachbrett aus?

Aufgabe 2.16. (5 Punkte)

Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir fixieren die Sprünge

$$\pm(2, 1) \text{ und } \pm(1, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a, b)$, $Q = (c, d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann (und dabei in M bleibt). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Man bestimme die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation und für jede Äquivalenzklasse genau einen besonders einfachen Vertreter. Man gebe auch einen Algorithmus an, der zu einem $(a, b) \in M$ diesen äquivalenten Vertreter findet.

Lösungen zur nächsten Aufgabe sollen über Wikimedia Commons hochgeladen werden, damit sie hier ins Skript eingebunden werden können. Lösungen können so lange eingereicht werden, bis eine optimale Lösung vorliegt.

Aufgabe 2.17. (5 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die die wesentlichen Aspekte von Beispiel 2.10 sichtbar macht.

Abbildungsverzeichnis