

Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 8

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Finde Quadratwurzeln für 2 modulo p für alle Primzahlen p mit $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ und $p \leq 32$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Berechne für $p = 17$ und $k = 5$ den Ausdruck

$$S(k, p) = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{ki}{p} \right\rfloor.$$

Berechne damit $\left(\frac{k}{p}\right)$ mit Hilfe von Lemma 7.8.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{2333}{3673}\right).$$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Berechne mit Hilfe des quadratischen Reziprozitätsgesetzes und seiner Ergänzungssätze das Legendre-Symbol

$$\left(\frac{479}{1277}\right).$$

Lege auf der Benutzerseite eine Lösungsseite an und schreibe dort die Rechenschritte auf. Dabei sollen die Begründungen für jeden einzelnen Rechenschritt explizit aufgeführt werden, wie das bei diesen Lösungen der Fall ist (Wählen Sie eine Darstellungsmöglichkeit nach Belieben, oder entwickeln Sie eine neue. Die Begründungen müssen unter Seitennamen stehen, die von ihrem Benutzernamen ausgehen).

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Bestimme die Menge M der Reste modulo 40 mit der Eigenschaft, dass für jede ungerade Primzahl p gilt: 10 ist ein Quadratrest modulo p genau dann, wenn $p \pmod{40}$ zu M gehört.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Finde eine ungerade Primzahl p mit der Eigenschaft, dass alle Zahlen $a \leq 10$ Quadratreste modulo p sind.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Zeige für eine positive ungerade Zahl n die Gleichung

$$\binom{-1}{n} = (-1)^{(n-1)/2}.$$

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Zeige für eine positive ungerade Zahl n die Gleichung

$$\binom{2}{n} = (-1)^{(n^2-1)/8}.$$

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Zeige für zwei ungerade positive Zahlen n und m die Beziehung

$$\binom{m}{n} \binom{n}{m} = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}}.$$