Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Anhang 7

Satz 7.1. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*
(2) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren und für jede Nullstelle λ stimmt die algebraische Vielfachheit μ_λ mit der geometrischen Vielfachheit $\dim(\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi))$ überein.*
(3) *Das Minimalpolynom P zu φ zerfällt in Linearfaktoren, die alle einfach sind.*

Definition 7.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Man sagt, dass die linearen Abbildungen

$$\varphi_1, \ldots , \varphi_n : V \longrightarrow V$$

simultan diagonalisierbar sind, wenn es eine Basis v_i, $i \in I$, von V gibt, so dass jedes v_i für jedes φ_j ein Eigenvektor ist.

Korollar 7.3. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit $\varphi^n = \mathrm{id}_V$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es sei vorausgesetzt, dass K eine n-te primitive Einheitswurzel enthält. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Nach der Voraussetzung an φ ist das Minimalpolynom von φ ein Teiler von $X^n - 1$. Nach der Voraussetzung an den Körper besitzt dieses Polynom n verschiedene Nullstellen. Daher zerfällt das Minimalpolynom in einfache Linearfaktoren. Nach Satz Anhang 7.1 ist somit φ diagonalisierbar. $\square$

Satz 7.4. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien*

$$\varphi_1, \ldots , \varphi_n : V \longrightarrow V$$

lineare Abbildungen, die alle diagonalisierbar seien. Dann sind diese linearen Abbildungen genau dann simultan diagonaliserbar, wenn sie paarweise vertauschbar sind.