Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 44

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 44.1. Sei $\varphi : V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$. Zeige, dass φ differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

Aufgabe 44.2. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei $\varphi : G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbar mit dem Differential $(D\varphi)_P$. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P = a(D\varphi)_P$$

gilt.

Aufgabe 44.3. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

Aufgabe 44.4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, W ein reeller Vektorraum und

$$\varphi : I \longrightarrow W$$

eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass zwischen dem totalen Differential und der Kurven-Ableitung die Beziehung

$$(D\varphi)_P(1) = \varphi'(P)$$

besteht.

Aufgabe 44.5. Berechne für die Addition

$$+ : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

das totale Differential.

Aufgabe 44.6. Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \, (x, y) \longmapsto x^2y^3.$$

Aufgabe 44.7. Seien V, W_1 und W_2 drei $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(1) Seien $L_1 : V \to W_1$ und $L_2 : V \to W_2$ zwei $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung
$$L_1 \times L_2 : V \longrightarrow W_1 \times W_2,\ v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$
$\mathbb{K}$-linear ist.

(2) Seien $f_1 : V \to W_1$ und $f_2 : V \to W_2$ zwei im Punkt $P \in V$ differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung
$$f = (f_1 \times f_2) : V \longrightarrow W_1 \times W_2,\ Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$
im Punkt P differenzierbar ist mit dem totalen Differential
$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.8. (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimme das totale Differential für die Abbildung
$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x^a y^b.$$

Aufgabe 44.9. (5 Punkte)

Zeige, dass eine Polynomfunktion
$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$
in jedem Punkt total differenzierbar ist.

Aufgabe 44.10. (6 Punkte)

Es seien V und W zwei komplexe Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und
$$\varphi : G \longrightarrow W$$
eine in $P \in G$ (komplex-)differenzierbare Abbildung.

a) Zeige, dass φ auch reell-differenzierbar ist, wenn man V und W als reelle Vektorräume auffasst.

b) Beschreibe das reelle Differential der Abbildung
$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$
in einem beliebigen Punkt $P \in \mathbb{C}$ bzgl. der reellen Basis $1, i \in \mathbb{C}$.

c) Man gebe ein Beispiel für eine Abbildung
$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$
die überall reell-differenzierbar ist, aber nirgendwo komplex-differenzierbar.

Aufgabe 44.11. (4 Punkte)

Seien $f_1, \ldots, f_n$ stetig differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

Aufgabe 44.12. (5 Punkte)

Seien V und W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Betrachte die Evaluationsabbildung

$$\mathrm{Ev} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times V \longrightarrow W,\ (L, v) \longmapsto L(v).$$

Es sei daran erinnert, dass der Homomorphismenraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ebenfalls ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(1) Ist die Evaluationsabbildung linear?
(2) Bestimme die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (L, v) in Richtung (M, u) mittels der Definition von totaler Differenzierbarkeit.

Aufgabe 44.13. (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g : G \to \mathbb{K}$ zwei in $P \in G$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 44.5 auf das Diagram

$$G \xrightarrow{f,g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{K}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.