Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 11

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Skizziere die Graphen der Funktionen x und y auf $V(xy)$. Man mache sich klar, dass das Produkt xy die Nullfunktion ist.

Aufgabe 11.2. Betrachte die Hyperbel $V(xy-1)$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}/(11)$. Bestimme das Inverse von $4x^3$ im zugehörigen Koordinatenring.

Aufgabe 11.3. Sei R ein kommutativer Ring und sei f_j, $j \in J$, eine Familie von Elementen in R. Es sei angenommen, dass die f_j zusammen das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass es eine endliche Teilfamilie f_j, $j \in J_0 \subseteq J$ gibt, die ebenfalls das Einheitsideal erzeugt.

Aufgabe 11.4. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ zwei Radikalideale. Zeige, dass die Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ genau dann affin-linear äquivalent sind, wenn es eine affin-lineare Variablentransformation gibt, die die beiden Ideale ineinander überführt.

Aufgabe 11.5. Es sei K ein Körper und $V, W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ seien zwei affin-algebraische Mengen. Es sei $V \subseteq W$ vorausgesetzt. Man definiere einen K-Algebra-Homomorphismus zwischen den beiden Koordinatenringen $R(V)$ und $R(W)$ und beschreibe dessen wichtigste Eigenschaften. Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Mengen, die nicht ineinander enthalten sind, von denen aber die Koordinatenringe isomorph sind.

Aufgabe 11.6. Es sei K ein Körper mit q Elementen und sei $V = V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine affin-algebraische Menge. Zeige, dass der Koordinatenring von V nicht gleich $K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1^q - x_1, \ldots, x_n^q - x_n) + \mathfrak{a}$ sein muss.

Aufgabe 11.7. Es sei K ein Körper der Charakteristik null. Wir betrachten den Schnitt von einem Zylinder und einer Kugel, und zwar

$$C = V(X^2 + Y^2 - 1) \cap V((X-3)^2 + Y^2 + Z^2 - 7) \subseteq \mathbb{A}_K^3 .$$

Zeige, dass man den Koordinatenring von C als Restklassenring eines Polynomrings in zwei Variablen schreiben kann.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.8. (4 Punkte)

Sei $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ eine Teilmenge, die in der metrischen Topologie offen und nicht leer sei. Es sei $F|_U = 0$ die Nullfunktion. Zeige, dass dann F das Nullpolynom ist.

Aufgabe 11.9. (3 Punkte)

Beweise Korollar 11.3 direkt aus Satz 10.10.

Aufgabe 11.10. (7 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und R der Polynomring in n Variablen über K. Wir wollen einen alternativen Beweis einsehen, dass $\operatorname{Id}(V(J)) = \operatorname{rad}(J)$ für jedes Ideal J in R ist, der auf Korollar 11.3 aufbaut. Sei $f \in \operatorname{Id}(V(J))$. Betrachte den Ring $R[T]$ und zeige, dass das Ideal

$$J' = (J, 1 - f \cdot T)$$

trivial ist. Schließe daraus, dass f im Radikal von J liegt.

Aufgabe 11.11. (3 Punkte)

Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und betrachte die dadurch definierte polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^{n+1},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n)),$$

die eine Bijektion des affinen Raumes mit dem Graph von φ definiert. Zu einer affin-algebraischen Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ betrachten wir das Bild $V' = \varphi(V)$. Man zeige, dass V' ebenfalls affin-algebraisch ist und man gebe ein beschreibendes Ideal an. Zeige, dass V genau dann irreduzibel ist, wenn V' irreduzibel ist.

Aufgabe 11.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden algebraischen Kurven

$$V(x^2 + y^2 - 2) \text{ und } V(x^2 + 2y^2 - 1)$$

über dem Körper $\mathbb{Z}/(7)$. Zeige, dass der Durchschnitt leer ist, und finde einen Erweiterungskörper $K \supseteq \mathbb{Z}/(7)$, über dem der Durchschnitt nicht leer ist. Berechne alle Punkte im Durchschnitt über K und über jedem anderen Erweiterungskörper. Man beschreibe auch den Koordinatenring des Durchschnitts.

Aufgabe 11.13. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Punkte in der affinen Ebene $\mathbb{A}_K^2$. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ beliebig vorgegebene Werte. Zeige, dass es ein Polynom $F \in K[X, Y]$ gibt mit $F(P_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.