Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 9

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 9.1. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

(1) $V_1 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$,
(2) $V_2 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}$,
(3) $V_3 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$,
(4) $V_4 = \{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

Aufgabe 9.2. Gegeben seien die beiden Untervektorräume

$$V_1 = \langle (1,1,2,1)^t, (0,-2,1,0)^t, (1,-1,3,1)^t \rangle$$

und

$$V_2 = \langle (3,1,7,3)^t, (-3,2,-5,-1)^t, (0,3,2,2)^t \rangle$$

des $\mathbb{R}^4$. Bestimme jeweils eine Basis und die Dimension von V_1, V_2 und $V_1 \cap V_2$.

Aufgabe 9.3. Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}$-linear sind:

(1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^t \mapsto (x+y, x-y)^t$,
(2) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 1$,
(3) $f_3 : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi(t)dt$,
(4) $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)^t \mapsto xy$,
(5) $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$.

Ist f_5 $\mathbb{C}$-linear?

Aufgabe 9.4. Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.5. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeige, dass die folgenden vier Aussagen äquivalent sind:

(1) $\operatorname{kern} f = \operatorname{kern} f \circ f$
(2) $\operatorname{kern} f \cap \operatorname{bild} f = \{0\}$
(3) $V = \operatorname{kern} f \oplus \operatorname{bild} f$
(4) $\operatorname{bild} f = \operatorname{bild} f \circ f$.

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 9.6. (4 Punkte)

Sind die reellen Zahlen $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 9.7. (4 Punkte)

Es seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^4$ und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(e_2) = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, f(e_4) = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme jeweils eine Basis von $\operatorname{kern} f$, $\operatorname{bild} f$ und $\operatorname{kern} f \cap \operatorname{bild} f$.