Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 4

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 4.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V. Zeige, dass dadurch in natürlicher Weise die folgenden linearen Operationen induziert sind.

(1) Die Operation auf dem k-ten Produkt von V mit sich selbst, also
$$G \times V^k \longrightarrow V^k,\ (\sigma, v_1, \ldots, v_k) \longmapsto (\sigma(v_1), \ldots, \sigma(v_k)).$$
(2) Die Operation auf dem k-ten Dachprodukt $\bigwedge^k V$, also
$$G \times \bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^k V,$$
die durch $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto \sigma(v_1) \wedge \ldots \wedge \sigma(v_k)$ festgelegt ist.
(3) Die duale Operation (von rechts) auf dem Dualraum V^*, also die Abbildung
$$V^* \times G \longrightarrow V^*,\ (f, \sigma) \longmapsto f \circ \sigma.$$

AUFGABE 4.2. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und

$$G \times V \longrightarrow V$$

eine lineare Operation einer Gruppe G auf V. Zeige, dass die induzierte Operation auf dem Polynomring $K[V]$ homogen, d.h. dass für jedes $\sigma \in G$ und $f \in R_d$ auch $f\sigma \in R_d$ gilt.

AUFGABE 4.3. Bestimme in Beispiel 3.15 und Beispiel 3.18 die induzierte Wirkung der Gruppe auf der d-ten Stufe des Polynomringes $K[V]$.

AUFGABE 4.4. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige die folgende Aussagen.

(1) Für die Einheiten gilt
$$\left(R^G\right)^\times = R^G \cap R^\times.$$

(2) Wenn R ein Körper ist, so ist auch R^G ein Körper.

Aufgabe 4.5. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass zu jedem $f \in R$ sowohl $\sum_{\sigma \in G} f\sigma$ als auch $\prod_{\sigma \in G} f\sigma$ zum Fixring R^G gehören.

Aufgabe 4.6. Es sei K ein unendlicher Körper und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K. Die Einheitengruppe $K^\times$ operiere durch skalare Multiplikation auf R, d.h. zu $\lambda \in K^\times$ gehört der durch $X_i \mapsto \lambda X_i$ definierte K-Algebraautomorphismus. Zeige, dass der Fixring zu dieser Operation K ist.

Aufgabe 4.7. Betrachte die Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf dem Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K. Bestimme (zu $n = 2, 3, 4$) für jede Untergruppe $H \subseteq S_n$ den Fixring R^H.

Aufgabe 4.8. Es sei S ein kommutativer Ring mit $2 \neq 0$ und $a \in S$. Zeige, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/(2) \cong \{1, -1\}$ auf der quadratischen Erweiterung

$$R := S[X]/(X^2 - a)$$

als Gruppe von S-Algebrahomomorphismen operiert, indem -1 durch $X \mapsto -X$ wirkt. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 4.9. Es sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe, die auf R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass die Operation genau dann trivial ist, wenn $R^G = R$ ist.

Aufgabe 4.10. Es sei K ein Körper. Zeige, dass auf $K[X, Y]/(XY)$ eine Gruppenoperation von $\mathbb{Z}/(2)$ gegeben ist, indem das nichttriviale Gruppenelement X und Y vertauscht. Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

Aufgabe 4.11. Es sei R ein kommutativer Ring und $G = (R, +)$ die additive Gruppe zu R.

a) Zeige, dass durch die Zuordnung

$$G \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^{\mathrm{alg}}\left(R[X], R[X]\right), \, r \longmapsto \varphi_r,$$

wobei φ_r den durch $X \mapsto X + r$ gegebenen R-Algebrahomomorphismus bezeichnet, eine Gruppenoperation von G auf dem Polynomring $R[X]$ definiert ist.

b) Zeige, dass der Fixring zu dieser Operation gleich R ist.

Aufgabe 4.12. Es sei R ein kommutativer Ring und $G = (R^\times, \cdot)$ die multiplikative Gruppe zu R.

a) Zeige, dass durch die Zuordnung

$$G \longrightarrow \mathrm{Hom}_R^{\mathrm{alg}}\left(R[X], R[X]\right), \, r \longmapsto \psi_r,$$

wobei ψ_r den durch $X \mapsto rX$ gegebenen R-Algebrahomomorphismus bezeichnet, eine Gruppenoperation von G auf dem Polynomring $R[X]$ definiert ist.

b) Man gebe Beispiele für kommutative Ringe derart, dass der Fixring zu dieser Operation gleich R ist.

c) Man gebe Beispiele für kommutative Ringe derart, dass der Fixring zu dieser Operation nicht gleich R ist.

Aufgabe 4.13. Es sei K ein unendlicher Körper und V ein K-Vektorraum, auf dem eine Gruppe linear operiere. Zeige, dass $f \in K[V]$ genau dann zu $K[V]^G$ gehört, wenn $f \colon V \to K$ G-invariant ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Operation der r-ten komplexen Einheitswurzeln $G = \mu_r(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}$ durch Multiplikation und die zugehörige Operation auf dem Polynomring $\mathbb{C}[X]$, dessen Fixring $\mathbb{C}[X^r]$ ist. Ferner betrachten wir die reelle Entsprechung dieser Situation, also die Operation auf $\mathbb{R}^2$ durch die Gruppe der Drehmatrizen der Ordnung r und die zugehörige Operation auf $\mathbb{R}[X, Y]$.

a) Zeige

$$\mathbb{R}[\mathrm{Re}\,(z^r)\,, \mathrm{Im}\,(z^r)] \subseteq \mathbb{R}[X, Y]^G.$$

b) Zeige, dass diese Inklusion echt sein kann.

Aufgabe 4.15. (6 Punkte)

Betrachte die Untergruppe

$$G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

aus Aufgabe 3.17. Bestimme zu jeder Untergruppe $H \subseteq G$ ein Polynom aus $\mathbb{R}[X, Y]$, das bezüglich H invariant ist, aber nicht bezüglich einer größeren Untergruppe.

Aufgabe 4.16. (6 Punkte)

Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Wir betrachten die durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugte zyklische Gruppe und ihre natürliche Operation auf $K[X,Y]$. Zeige, dass der Invariantenring gleich

$$K[Y, X^p - XY^{p-1}]$$

ist.

Aufgabe 4.17. (5 Punkte)

Es sei A ein kommutativer Ring und

$$R = A \times A \times \cdots \times A$$

der n-fache Produktring von A mit sich selbst.

a) Zeige, dass die symmetrische Gruppe S_n auf R durch Vertauschen der Komponenten operiert.

b) Bestimme den Fixring zu dieser Operation.

c) Zeige, dass für jede transitive Untergruppe $H \subseteq S_n$ der Fixring gleich dem Fixring aus Teil (b) ist.

Aufgabe 4.18. (3 Punkte)

Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen lokalen Ring als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass der Fixring R^G ebenfalls lokal ist.