Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 29

Aufwärmaufgaben

Die folgende Aufgabe liefert eine Verallgemeinerung von Korollar 80.7 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)).

Aufgabe 29.1. Zeige folgende Aussage über das Dachprodukt: Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $v_1, \ldots, v_r$ und $w_1, \ldots, w_r$ Vektoren in V, die miteinander in der Beziehung

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}$$

stehen, wobei M eine $r \times r$-Matrix bezeichnet. Dann gilt in $\bigwedge^r V$ die Beziehung

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_r = (\det M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_r .$$

Eine endliche Untergruppe $G \subseteq \operatorname{GL}_n(K)$ über einem Körper K heißt *klein*, wenn sie keine Pseudoreflektion enthält.

Aufgabe 29.2. Es sei $G \subseteq \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ eine kleine Gruppe. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \left(\operatorname{Spek}\left(K[X_1, \ldots, X_n]^G\right)\right)_{\mathbb{C}}$ gibt, deren Fundamentalgruppe gleich G ist.

Aufgabe 29.3. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ keine lineare Gruppe ist.

Aufgabe 29.4. Zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, 0)$ keine affin-algebraische Gruppe ist.

Aufgabe 29.5. Bestimme den Zariski-Abschluss der von der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untergruppe $G \subseteq \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 29.6. Zeige, dass die multiplikative Gruppe $(\mathbb{C}^\times, 1, \cdot)$ eine lineare Gruppe ist.

Aufgabe 29.7. Zeige, dass die additive Gruppe $(\mathbb{C}, 0, +)$ eine lineare Gruppe ist.

Aufgabe 29.8. Zeige, dass das Produkt von zwei linearen Gruppen wieder eine lineare Gruppe ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.9. (4 Punkte)

Bestimme den Zariski-Abschluss der von der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

Aufgabe 29.10. (4 Punkte)

Zeige, dass eine zyklische Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bei $n \geq 2$ nicht Zariski-dicht ist.

Abbildungsverzeichnis