

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 19.1. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden Elementen erzeugt werde. Es sei vorausgesetzt, dass die Multiplizität von M mit der Führungszahl von M übereinstimmt. Bestimme ein minimales Erzeugendensystem und die Einbettungsdimension von M .

AUFGABE 19.2. Sei M ein kommutatives Monoid und R ein kommutativer Ring. Charakterisiere für welche Teilmengen $I \subseteq M$ die Teilmenge

$$R[I] = \bigoplus_{m \in I} T^m \subseteq R[M]$$

ein Ideal in $R[M]$ ist.

AUFGABE 19.3. Sei K ein Körper. Finde ein kommutatives Monoid M derart, dass eine Isomorphie

$$K[M] \cong K[X, Y, U, V]/(UX - VY)$$

vorliegt.

AUFGABE 19.4. Sei $R \subseteq S$ eine ganze Erweiterung von Integritätsbereichen und sei $F \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die zugehörige Erweiterung $R_F \subseteq S_F$ ganz ist.

AUFGABE 19.5.*

Seien R und S Integritätsbereiche und sei $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Es sei $f \in R$ ein Element, das in S eine Einheit ist. Zeige, dass f dann schon in R eine Einheit ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 19.6. (4 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{N}$ das durch 3, 5, 7 erzeugte numerische Untermonoid. Bestimme eine Restklassendarstellung des zugehörigen Monoidringes.

AUFGABE 19.7. (4 Punkte)

Klassifiziere sämtliche numerische Monoide M (mit teilerfremden Erzeugern) mit Führungszahl $f(M) \leq 6$. Man gebe jeweils die Einbettungsdimension, die Multiplizität und den Singularitätsgrad an.

AUFGABE 19.8. (3 Punkte)

Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid und K ein Körper. Definiere

$$M_+ = M \cap \mathbb{N}_+ \text{ und } nM_+ = \{m \in M \mid \text{es gibt eine Darstellung} \\ m = m_1 + \dots + m_n \text{ mit } m_i \in M_+\}.$$

Zeige, dass nM_+ „Ideale“ in M sind, dass zu M_+ ein maximales Ideal \mathfrak{m} in $K[M]$ gehört, und dass das zu nM_+ gehörige Ideal gleich \mathfrak{m}^n ist.

AUFGABE 19.9. (3 Punkte)

Seien M und N kommutative Monoide und sei K ein Körper. In welcher Beziehung steht $K\text{-Spek}(K[M \times N])$ zu $K\text{-Spek}(K[M])$ und $K\text{-Spek}(K[N])$?

AUFGABE 19.10. (3 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

(Vergleiche Aufgabe 10.10).