Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $w \in V$ ein fixierter Vektor.

a) Zeige, dass durch

$$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto v + tw,$$

eine Operation von $(\mathbb{R}, +)$ auf V definiert ist.

b) Zeige, dass eine differenzierbare Funktion

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

genau dann unter dieser Operation invariant ist, wenn für die Richtungsableitung in Richtung w die Beziehung $D_w f = 0$ gilt.

Aufgabe 5.2. Es sei G eine Gruppe, die auf einer Menge M operiere, und es sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Zeige, dass auf dem Bahnenraum $M \backslash H$ die Restklassengruppe G/H in natürlicher Weise operiert, und dass der Bahnenraum $(M\backslash H) \setminus (G/H)$ mit dem Bahnenraum $M \backslash G$ übereinstimmt.

Aufgabe 5.3. Es sei K ein Körper, G eine Gruppe und

$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}_V$$

eine Darstellung von G in einen n-dimensionalen Vektorraum über K. Es seien $u_1, \ldots, u_n$ und $v_1, \ldots, v_n$ zwei Basen von V und

$$\rho_u, \rho_v\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$$

seien die zugehörigen Matrixdarstellungen. Zeige, dass die Invariantenringe $K[X_1, \ldots, X_n]^{G, \rho_u}$ und $K[Y_1, \ldots, Y_n]^{G, \rho_v}$ isomorph sind.

Aufgabe 5.4. Beweise den Zusatz von Lemma 5.4.

Aufgabe 5.5. Zeige, dass der im Beweis zu Lemma 5.4 verwendete komplexe Invariantenring nicht faktoriell ist.

Aufgabe 5.6. Erstelle eine Version von Lemma 5.8 für geeignete multiplikative Systeme.

Aufgabe 5.7. Diskutiere Beispiel 5.9 für den Fall, dass K ein endlicher Körper ist.

Aufgabe 5.8. Man gebe ein Beispiel für einen Integritätsbereich R und einer Gruppenoperation einer endlichen Gruppe G auf R derart, dass nicht jeder Zwischenring S, $R^G \subseteq S \subseteq R$, der Invariantenring zu einer Untergruppe von G ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.9. (4 Punkte)

Wir betrachten die natürliche Operation der Drehgruppe SO_2 auf dem $\mathbb{R}^4 = (\mathbb{R}^2)^2$. Mit den natürlichen Identifizierungen $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und

$$\mathrm{SO}_2 \cong \{u \in \mathbb{C} |\ |u| = 1\}$$

kann man dies als eine lineare Operation auf dem $\mathbb{C}^2$ auffassen. Zeige, dass die zugehörige Operation auf dem Polynomring $\mathbb{C}[w, z]$ nur die Konstanten als Invarianten besitzt.

Aufgabe 5.10. (5 Punkte)

Drücke die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2,$$

explizit als eine stetige Funktion in den Funktionen xy und $x^2 - y^2$ aus.

(vergleiche Aufgabe 4.14).

Aufgabe 5.11. (6 Punkte)

Es sei K ein unendlicher Körper. Wir betrachten auf dem Körper $K(X, Y)$ die Operation von $K^\times$, wobei $\lambda \in K^\times$ durch $X \mapsto \lambda X$, $Y \mapsto \lambda Y$ auf $K[X, Y]$ wirkt und diese Wirkung auf den Quotientenkörper fortgesetzt wird. Zeige, dass der Fixring zu dieser Operation gleich $K\left(\frac{X}{Y}\right)$ ist.

Aufgabe 5.12. (3 Punkte)

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Wir betrachten die skalare Multiplikation von $\mathbb{K}^\times$ auf $\mathbb{K}^n$. Es sei Y ein metrischer Raum und

$$\varphi\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung, die auf den Bahnen der Operation konstant sei. Zeige, dass φ konstant ist.