Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 17

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeige, dass für natürliche Zahlen $a, b \geq 1$ und $n \geq 2$ die Zahl $a^n - b^n$ nicht ein Teiler von $a^n + b^n$ ist.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Finde eine irreduzible Ganzheitsgleichung für die Eisensteinzahl $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ Ringhomomorphismen derart, dass S ganz über R und T ganz über S ist. Zeige, dass dann auch T ganz über R ist.

Aufgabe 4. (1 Punkt)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Zeige, dass wenn R ein Körper ist, die Begriffe algebraisch und ganz für ein Element $x \in A$ übereinstimmen. Zeige ferner, dass für einen Integritätsbereich, der kein Körper ist, diese beiden Begriffe auseinanderfallen.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei k eine fixierte positive ganze Zahl und betrachte den Unterring

$$R = \mathbb{Z}[ki] = \{a + cki : \, a, c \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}[i] \; .$$

Zeige die Isomorphie $R \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2 + k^2)$ und dass $\mathbb{Z}[i]$ ganz über R ist.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: prim muss hier nicht äquivalent zu irreduzibel sein.

In den folgenden Aufgaben wird der Polynomring $K[X,Y]$ in zwei Variablen über einem Körper K verwendet. Diesen kann man definieren als $(K[X])[Y]$. Die Elemente in ihm, also die Polynome in zwei Variablen, haben die Gestalt

$$P = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \ .$$

Wir interessieren uns für Restklassenringe vom Typ $R = K[X,Y]/(F)$. Die Nullstellenmenge von F besteht aus der Menge derjenigen Punkte (x,y) in der Ebene, für die $F(x,y) = 0$ ist (dieses Nullstellengebilde ist eine geometrische Version des Ringes R).

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und betrachte den Restklassenring

$$R = K[X,Y]/(X^2 - Y^3) \ .$$

Dies ist ein Integritätsbereich nach Aufgabe 17.8. Zeige, dass die Normalisierung von R gleich dem Polynomring $K[T]$ ist. Skizziere die Nullstellenmenge von $F = X^2 - Y^3$ in der reellen Ebene und finde eine Parametrisierung dieses Gebildes.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und betrachte den Ringhomomorphismus

$$\varphi : R = K[X,Y] \longrightarrow K[T] \ ,$$

der durch die Einsetzung

$$X \longmapsto (T-1)(T+1) \text{ und } Y \longmapsto T(T-1)(T+1)$$

gegeben ist. Finde ein von null verschiedenes Polynom $F \in K[X,Y]$ derart, dass F unter φ auf null abgebildet wird. Skizziere die Nullstellenmenge von F in der reellen Ebene.

Es kann natürlich auch mehr als zwei Variablen geben, und der Grundring muss kein Körper sein, wie in folgender Aufgabe.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Definiere unter Anlehnung an die Parametrisierung der pythagoreischen Tripel einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^2 - Z^2) \longrightarrow \mathbb{Z}[U,V] \ .$$

Zeige, dass dieser injektiv, aber nicht surjektiv ist.