Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 13

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der folgenden drei Zahlen

$2^{33} - 1,\ 2^{91} - 1,\ 2^{13} + 1.$

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Eine natürliche Zahl n ist genau dann vollkommen, wenn die Stammbruchsummenbedingung

$\sum_{d|n,\, d\neq 1} \frac{1}{d} = 1$

gilt. Schreibe für einige vollkommene Zahlen die Stammbruchsumme hin.

In den folgenden Aufgaben werden einige Begriffe verwendet, die mit dem Begriff der vollkommenen Zahl in Verbindung stehen.

Eine natürliche Zahl n heißt defizient, wenn die Summe der Teiler kleiner als $2n$ ist.

Eine natürliche Zahl n heißt abundant, wenn die Summe der Teiler größer als $2n$ ist.

Eine natürliche abundante Zahl heißt sonderbar, wenn sie nicht als eine Teilsumme von ihren echten Teilern darstellbar ist.

Aufgabe 3. (1 Punkt)

Zeige: eine Primzahlpotenz p^r ist defizient.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei $n > 6$ ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen. Dann ist n defizient.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei n eine ungerade Zahl mit der Eigenschaft, dass in ihrer Primfaktorzerlegung nur zwei verschiedene Primfaktoren vorkommen. Dann ist n defizient.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Finde eine ungerade abundante Zahl n.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Finde die kleinste sonderbare Zahl.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Zeige, dass der Quotient

$$\frac{\sigma(n)}{n}$$

unbeschränkt ist.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Zeige ohne Verwendung der Regel von Thabit, dass die beiden Zahlen 220 und 284 befreundet sind.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Ergänze die folgende Tabelle um weitere Zeilen (pro richtige Zeile ein Punkt, maximal zwei).

k	$a = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$	$b = 3 \cdot 2^k - 1$	$c = 9 \cdot 2^{2k-1} - 1$	$m = 2^k ab$	$n = 2^k c$
2	5	11	71	220	284
3	11	23	$287 = 7 \cdot 41$ (nicht prim)		
4					
5					
6					
7					