Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 11

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 11.1. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Man mache sich nochmal die folgenden wichtigen Aussagen klar:

(1) Ist λ ein Eigenwert von φ, so ist $\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi) = \ker(\varphi - \lambda\, id)$.
(2) φ hat nur endlich viele Eigenwerte.
(3) λ ist genau dann Eigenwert von φ, wenn $\chi_\varphi(\lambda) = 0$ gilt.

Aufgabe 11.2. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die lineare Abbildung φ ist ein Isomorphismus.
(2) 0 ist kein Eigenwert von φ.
(3) Der konstante Term des charakteristischen Polynoms χ_φ ist $\neq 0$.

Aufgabe 11.3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})\,.$$

Berechne:

(1) die Eigenwerte von A;
(2) die zugehörigen Eigenräume;
(3) die geometrische und algebraische Vielfachheit der einzelnen Eigenwerte;
(4) eine Matrix $C \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ derart, dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 11.4. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Untersuche ob A diagonalisierbar ist in Abhängigkeit von $\mathbb{K}$ (d.h., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Falls ja, so gebe eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D mit $D = C^{-1}AC$ an.

AUFGABE 11.5. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,.$$

Löse das lineare Gleichungssystem $Ax = (1, 0, 2)^t$ mit Hilfe der Cramerschen Regel (man überlege sich natürlich vorher, ob man diese Regel überhaupt anwenden darf).

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

AUFGABE 11.6. (4 Punkte)

Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Untersuche ob A diagonalisierbar ist in Abhängigkeit von $\mathbb{K}$ (d.h., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Falls ja, so gebe eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D mit $D = C^{-1}AC$ an.

AUFGABE 11.7. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $F = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ ein reelles Polynom. Weiter sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

(1) Zeige, dass v ein Eigenvektor von $F(A)$ zum Eigenwert $F(\lambda)$ ist.
(2) Wenn A diagonalisierbar ist, so auch $F(A)$.