Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 21

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Seien K und L Körper, sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A, $K \subseteq A \subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

Aufgabe 2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Zeige, dass dann $K(f)$ der Quotientenkörper von $K[f]$ ist.

Aufgabe 3. Berechne im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ das Produkt

$$(-2+\sqrt{7}) \cdot (4-\sqrt{7})\,.$$

Aufgabe 4. Bestimme das Inverse von

$$1+\sqrt{2}+3\sqrt{10}$$

im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{5}]$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ das Inverse von $3+5\sqrt{11}$.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $f \in L$ ein nicht algebraisches Element. Zeige, dass dann eine Isomorphie

$$K(X) \longrightarrow K(f)$$

von Körpern vorliegt.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Betrachte den Körper $\mathbb{Z}/(13) = \{0,1,2,...,12\}$ mit 13 Elementen.

(1) Zeige, dass 5 kein Quadrat in $\mathbb{Z}/(13)$ ist und folgere, dass
$$\mathbb{Z}/(13)[X]/(X^2-5) =: \mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$$
ein Körper ist.

(2) Betrachte die quadratische Körpererweiterung
$$\mathbb{Z}/(13) \subset \mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$$
und berechne
$$(2+3\sqrt{5})(1+11\sqrt{5})(10+7\sqrt{5})$$

(3) Finde das Inverse zu $7+3\sqrt{5}$ in $\mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$.

(4) Zeige, dass -5 kein Quadrat in $\mathbb{Z}/(13)$ ist, dafür aber in $\mathbb{Z}/(13)[\sqrt{5}]$.

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Es seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeige, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{p},\sqrt{q}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, der über $\mathbb{Q}$ den Grad vier besitzt

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Bestimme das Inverse von
$$2+3\sqrt{5}+\sqrt{7}+3\sqrt{35}$$
im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{5},\sqrt{7}]$.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Führe in $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}])[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^3-(2+\sqrt{3})X^2+5\sqrt{3}X+1+2\sqrt{3}$ und $T = \sqrt{3}X^2-X+2+7\sqrt{3}$ durch.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom von
$$\sqrt{3}+\sqrt{5}$$
über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Sei K ein endlicher Körper mit $q=p^n$ Elementen. Zeige, dass es in K genau $\varphi(q-1)$ primitive Elemente gibt, wobei φ die Eulersche Funktion bezeichnet.