Fachbereich Mathematik/Informatik **27. März 2012**
Prof. Dr. H. Brenner

Einführung in die mathematische Logik

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Wählen Sie eines der Themen A,B,C (Aufsatzthemen) oder D (Einzelaufgaben) aus. Zum Bestehen: Bei den Themen A,B,C sollte deutlich werden, dass Sie die Theorien in ihren Grundzügen verstanden haben und darüber sachgerecht und detailliert referieren können. Bei D sollten Sie die Hälfte der insgesamt 32 Punkte erhalten.

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Thema A: Schildern Sie den Aufbau einer prädikatenlogischen Sprache einschließlich der Semantik und eines Ableitungskalküls.

Thema B: Beschreiben Sie Registermaschinen und das Halteproblem einschließlich einer Beweisskizze für dessen Unlösbarkeit.

Thema C: Erläutern Sie die Unentscheidbarkeit der Arithmetik, und skizzieren Sie einen Beweis dafür.

D - Einzelaufgaben

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Eine Grundtermmenge sei durch die Variablenmenge $V = \{x, y, z\}$, eine Konstantenmenge $K = \{c_1, c_2\}$, die einstelligen Funktionssymbole $F_1 = \{f, g\}$ und die zweistelligen Funktionssymbole $F_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gegeben. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term

$$gf\beta\beta\alpha fxy\gamma c_1 zggc_2 \,.$$

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Formuliere die folgenden Beziehungen (ein- oder mehrstellige Prädikate) innerhalb der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ allein mittels Gleichheit, den Konstanten 0 und 1, Addition, Multiplikation und unter Verwendung von aussagenlogischen Junktoren und Quantoren.

(1) $x < y$.
(2) x ist ein Vielfaches von y.
(3) x ist ein Vielfaches von 3.
(4) x ist eine dritte Potenz.
(5) x ist keine Primzahl.
(6) x und y besitzen die gleichen Primfaktoren.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Formalisiere in der arithmetischen Sprache die (wahre) Aussage, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 4. (1 Punkt)

Erstelle einen prädikatenlogischen Ausdruck p, der in einer Struktur genau dann gilt, wenn die Grundmenge der Struktur genau 5 Elemente besitzt.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei das arithmetische Alphabet $\{0, 1, +, \cdot\}$ zusammen mit der Variablenmenge $\{x, y\}$ gegeben. Interpretiere den Term

$$((0 + 1) + x) \cdot (1 + (y + 1))$$

unter den folgenden Interpretationen.

(1) $M = \mathbb{N}$ mit der Standardinterpretation und der Variablenbelegung $I(x) = 5$ und $I(y) = 3$.

(2) $M = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ mit der Standardinterpretation

$$I(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; I(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der üblichen Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation und der Variablenbelegung $I(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $I(y) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(3) $M = \mathbb{Z}$, mit

$$I(0) = 5,\; I(1) = -1,\; I(x) = 0,\; I(y) = 0\,,$$

und wo sowohl $+$ als auch $\cdot$ als Subtraktion interpretiert werden.

(4) $M =$ Potenzmenge von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit

$$I(0) = \emptyset,\; I(1) = \{1, 2, 3, 4, 5\},\; I(x) = \emptyset,\; I(y) = \{2, 4\}\,,$$

und wo $+$ als $\cup$ und $\cdot$ als $\cap$ interpretiert wird.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Es sei Γ eine Ausdrucksmenge und p ein Ausdruck in einer Sprache erster Stufe. Zeige, dass $\Gamma \vDash p$ genau dann gilt, wenn $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nicht erfüllbar ist.

Aufgabe 7. (6 (1+2+3) Punkte)

a) Formuliere die Existenzeinführung im Sukzedens.

b) Formuliere die Existenzeinführung im Antezedens.

c) Zeige durch ein Beispiel, dass die Bedingung an die Variable in der Existenzeinführung im Antezedens wesentlich ist.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das nach und nach alle Primzahlen ausdruckt.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das die Potenz $r_i^{r_j}$ berechnet (und ausgibt), wobei r_i bzw. r_j die Registerinhalte der Register R_i, R_j, $i \neq j$, sind.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Was besagt die Repräsentierbarkeit einer Abbildung

$$F : \mathbb{N}^r \longrightarrow \mathbb{N}^s$$

durch eine Menge Γ von arithmetischen Ausdrücken?