Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 15

Universelle Eigenschaft der Determinante

Definition 15.1. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung

$$\triangle : V^n \longrightarrow K$$

heißt *Determinantenfunktion*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) $\triangle$ ist multilinear.
(2) $\triangle$ ist alternierend.

Lemma 15.2. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei*

$$\triangle : \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K$$

eine Determinantenfunktion. Dann besitzt $\triangle$ folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn man eine Zeile von M mit $s \in K$ multipliziert, so ändert sich $\triangle$ um den Faktor s.*
(2) *Wenn in M eine Nullzeile vorkommt, so ist $\triangle(M) = 0$.*
(3) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich $\triangle$ mit dem Faktor -1.*
(4) *Wenn man zu einer Zeile ein skalares Vielfaches einer anderen Zeile dazuaddiert, so ändert sich $\triangle$ nicht.*
(5) *Wenn $\triangle(E_n) = 1$ ist, so ist für eine obere Dreiecksmatrix $\triangle(M) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.*

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Multilinearität. (3) folgt aus

$$0 = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r+v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r+v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Zu (4) betrachten wir die Situation, wo zur s-ten Zeile das a-fache der r-ten Zeile addiert wird, $r < s$. Aufgrund der schon bewiesenen Teile ist dann

$$
\triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s+av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + a\triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle\begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} .
$$

(5). Wenn ein Diagonalelement null ist, so sei $r = \max\{i |\, a_{ii} = 0\}$. Zu der r-ten Zeile kann man durch Hinzuaddieren von geeigneten Vielfachen der i-ten Zeilen, $i > r$, erreichen, dass aus der r-ten Zeile eine Nullzeile wird, ohne dass sich der Wert der Determinantenfunktion ändert. Nach (2) muss dieser Wert dann null sein. Wenn kein Diagonalelement null ist, so kann man durch wiederholte Skalierung erreichen, dass alle Diagonalelemente zu 1 werden, und durch Zeilenadditionen kann man erreichen, dass die Einheitsmatrix entsteht. Daher ist

$$\triangle(M) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\triangle(E_n) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$\square$

Satz 15.3. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es genau eine Determinantenfunktion*

$$\triangle : \operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K$$

mit

$$\triangle(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1 ,$$

wobei e_i die Standardvektoren sind, nämlich die Determinante.

Beweis. Die Determinante besitzt aufgrund von Satz 14.11, Satz 14.12 und Lemma 14.8 die angegebenen Eigenschaften. Zur Eindeutigkeit. Zu jeder Matrix M gibt es eine Folge von elementaren Zeilenumformungen derart, dass das Ergebnis eine obere Dreicksmatrix ist. Dabei ändert sich nach Lemma 15.2 bei einer Vertauschung von Zeilen der Wert der Determinante mit dem Faktor -1, bei der Umskalierung einer Zeile um den Skalierungsfaktor und bei der Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile gar nicht. Daher ist eine Determinantenfunktion durch die Werte auf einer oberen Dreiecksmatrix bzw. nach Skalierung und Zeilenaddition sogar auf der Einheitsmatrix festgelegt. □

Der Determinantenmultiplikationssatz

Satz 15.4. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B$$

Beweis. Wir fixieren die Matrix B. Es sei zunächst $\det B = 0$. Dann sind die Spalten von B linear abhängig und damit sind auch die Spalten von $A \circ B$ linear abhängig, woraus $\det AB = 0$ folgt. Sei nun B invertierbar. In diesem Fall betrachten wir die wohldefinierte Abbildung

$$\delta : \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K,\ A \longmapsto (\det A \circ B)(\det B)^{-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung gleich der Abbildung $A \mapsto \det A$ ist, indem wir die die Determinante charakterisierenden Eigenschaften nachweisen und Satz 15.3 anwenden. Wenn $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von A sind, so ergibt sich $\delta(A)$, indem man auf die Zeilen $Bz_1, \ldots, Bz_n$ die Determinante anwendet und mit $(\det B)^{-1}$ multipliziert. Daher folgt die Multilinearität und die alternierende Eigenschaft aus Aufgabe 14.10. Wenn man mit $A = E_n$ startet, so ist $A \circ B = B$ und daher ist

$$\delta(E_n) = (\det B) \cdot (\det B)^{-1} = 1.$$

□

Die Determinante der Transponierten

Definition 15.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^t = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht.

Satz 15.6. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M = \det M^t .$$

Beweis. Wir führen diese Aussage auf die entsprechenden Aussagen für Elementarmatrizen zurück, wofür sie direkt verifiziert werden kann, siehe Aufgabe 15.7. Es gibt Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ derart, dass

$$D = E_s \cdots E_1 M$$

eine Diagonalmatrix ist oder aber eine Nullzeile besitzt. In jedem Fall ist dann

$$D^t = M^t E_1^t \cdots E_s^t$$

bzw.

$$M^t = D^t (E_s^t)^{-1} \cdots (E_1^t)^{-1} .$$

Wenn D eine Nullzeile besitzt, so ist der Zeilenrang $< n$. Da dies ebenso für den Spaltenrang gilt, ist $\det M^t = 0$. Wir können also annehmen, dass D eine Diagonalmatrix ist. Eine solche ändert sich beim Transponieren nicht. Da die Determinante von Elementarmatrizen sich beim Transponieren auch nicht ändern, gilt

$$\begin{aligned} \det M^t &= \det \left(D^t (E_s^t)^{-1} \cdots (E_1^t)^{-1}\right) \\ &= \det D^t \cdot \det (E_s^t)^{-1} \cdots \det (E_1^t)^{-1} \\ &= \det D \cdot \det E_s^{-1} \cdots \det E_1^{-1} \\ &= \det E_1^{-1} \cdots \det E_s^{-1} \cdot \det D \cdot \\ &= \det \left(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} \cdot D\right) \\ &= \det M. \end{aligned}$$

□

Korollar 15.7. *(Entwicklung nach beliebiger Spalte und Zeile) Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} .$$

Beweis. Für $j = 1$ ist dies die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt es für $i = 1$ aufgrund von Satz 15.6. Durch Spalten und Zeilenvertauschung folgt es daraus allgemein, siehe Aufgabe 15.10. □

Die Determinante von Endomorphismen

Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Dieser wird (siehe Definition 13.4) durch eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu nehmen, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bzgl. einer anderen Basis durch eine „völlig“ andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Übergangsmatrix B aufgrund von Korollar 13.11 die Beziehung
$$N = BMB^{-1}.$$
Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher
$$\det N = \det(BMB^{-1}) = (\det B)(\det M)(\det B)^{-1} = \det M,$$
so dass die folgende Definition unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 15.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
eine lineare Abbildung, die bzgl. einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man
$$\det \varphi := \det M$$
die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

Adjungierte Matrix und Cramersche Regel

Definition 15.9. Zu einer quadratischen Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt
$$\mathrm{Adj}\ M = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji},$$
wobei M_{ji} die Restmatrix zur j-ten Zeile und zur i-ten Spalte ist, die *adjungierte Matrix* von M.

Achtung, bei der Definition der Einträge der adjungierten Matrix werden Zeilen und Spalten vertauscht.

Satz 15.10. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*
$$(\mathrm{Adj}\ M) \cdot M = M \cdot (\mathrm{Adj}\ M) = (\det M)E_n$$
Wenn M invertierbar ist, so ist
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot \mathrm{Adj}\ M.$$

Beweis. Sei $M = (a_{ij})_{ij}$. Die Koeffizienten der adjungierten Matrix seien

$$b_{ik} = (-1)^{i+k} \det M_{ki} \, .$$

Die Koeffizienten des Produktes $(\text{Adj } M) \cdot M$ sind

$$c_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki}.$$

Bei $j = i$ ist dies $\det M$, da es sich bei dieser Summe um die Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte handelt. Sei $j \neq i$ und es sei N die Matrix, die aus M entsteht, wenn man in M die i-te Spalte durch die j-te Spalte ersetzt. Wenn man N nach der i-ten Spalte entwickelt, so ist dies

$$0 \;=\; \det N \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki} \;=\; c_{ij}.$$

Also sind diese Koeffizienten null, und damit stimmt die erste Gleichung. Die zweite Geichung ergibt sich ebenso, wobei man die Entwicklung der Determinante nach den verschiedenen Zeilen ausnutzen muss. □

Satz 15.11. *(Cramersche Regel) Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Es sei vorausgesetzt, dass die beschreibende Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ invertierbar sei. Dann erhält man die eindeutige Lösung für x_j durch

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & c_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & c_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det M} \, .$$

Beweis. Für eine invertierbare Matrix M ergibt sich die Lösung für das lineare Gleichungssystem $Mx = c$, indem man M^{-1} anwendet, d.h. es ist $x = M^{-1}c$. Unter Verwendung von Satz 15.10 bedeutet dies $x = \frac{1}{\det M}(\text{Adj } M)c$. Für die j-te Komponente bedeutet dies

$$x_j \;=\; \frac{1}{\det M} \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} (\det M_{kj}) \cdot c_k \Big).$$

Der rechte Faktor ist dabei die Entwicklung der Determinante der Matrix im Zähler nach der j-ten Spalte. □

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Bemerkung 15.12. Die Determinante kann auch auf eine andere Art eingeführt werden, nämlich über die sogenannte *Leibniz-Formel*. Diese lautet für eine $n \times n$-Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} .$$

Dabei wird über alle bijektiven Abbildungen (man spricht in diesem Zusammenhang von Permutationen) von $\{1, \ldots, n\}$ auf sich summiert. Zu einer Permutation σ ist das *Signum* (oder das *Vorzeichen*) $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{1, -1\}$ durch

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

definiert.

Abbildungsverzeichnis