Fachbereich Mathematik/Informatik **5. Februar 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik III

Testklausur 2 mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	2	6	6	4	6	5	5	6	8	4	4	64
erhalt. Pkt.:														

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Tangentialraum* in einem Punkt $P \in M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.
(2) Eine *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit* $M \subseteq N$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit N.
(3) Ein *orientierter* Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.
(4) Die *zurückgezogene Differentialform* $\varphi^*\omega$ zu einer Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ bezüglich einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : L \to M$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M.
(5) Das *Wegintegral* zu einer 1-Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bezüglich einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to M$.
(6) Eine *positive Volumenform* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M der Dimension n.
(7) Eine *riemannsche Mannigfaltigkeit*.
(8) Die *äußere Ableitung* zu einer stetig differenzierbaren Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.

Lösung

(1) Der Tangentialraum T_PM besteht aus allen Äquivalenzklassen von tangential äquivalenten differenzierbaren Wegen durch diesen Punkt.
(2) Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq N$ heißt abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $P \in M$ eine Karte gibt mit $P \in W \subseteq N$ offen, $\theta : W \to W'$, $W' \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und mit
$$M \cap W = \theta^{-1}((\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W') .$$
(3) Ein Atlas (U_i, V_i, α_i) heißt orientiert, wenn sämtliche Karten orientiert sind und wenn alle Kartenwechsel orientierungstreu sind.
(4) Die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\omega$ ist für $P \in L$ und $v_1, \ldots, v_k \in T_PL$ durch
$$(\varphi^*\omega)(P, v_1, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(P), T_P\varphi(v_1), \ldots, T_P\varphi(v_k))$$
definiert.
(5) Das Wegintegral ist durch
$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*\omega$$
definiert.

(6) Eine n-Differentialform ω auf M heißt eine positive Volumenform, wenn für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

(mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und Koordinatenfunktionen $x_1, \ldots, x_n$) in der lokalen Darstellung der Differentialform

$$\alpha_* \omega \;=\; f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

die Funktion f überall positiv ist.

(7) Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M heißt riemannsche Mannigfaltigkeit, wenn auf jedem Tangentialraum $T_P M$, $P \in M$, ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_P$ erklärt ist derart, dass für jede Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ die Funktionen (für $1 \leq i, j \leq n$)

$$g_{ij} : V \longrightarrow \mathbb{R},\ Q \longmapsto g_{ij}(Q) = \langle T(\alpha^{-1})(e_i), T(\alpha^{-1})(e_j) \rangle_{\alpha^{-1}(Q)},$$

C^1-differenzierbar sind.

(8) Die äußere Ableitung von ω wird lokal auf einer Karte, auf der ω die Gestalt $\omega = \sum_{\#(I)=k,\, I \subseteq \{1,\ldots,\dim M\}} f_I dx_I$ besitzt, durch

$$d\omega = \sum_{\#(I)=k,\, I \subseteq \{1,\ldots,\dim M\}} d(f_I) \wedge dx_I$$

definiert.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des Vektorraumes V. Wie sieht eine Basis des k-ten Dachproduktes $\bigwedge^k V$ aus?
(2) Die *universelle Eigenschaft* des k-ten Dachproduktes eines Vektorraums V.
(3) Die *Formel für die zurückgenommene Volumenform* $\varphi^*\omega$ zu $\omega = f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ unter einer stetig differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
(4) Die *Berechnung des kanonischen Volumens* einer messbaren Menge $T \subseteq M$ einer riemannschen Mannigfaltigkeit M, die ganz in einem offenen Kartengebiet $T \subseteq U$ liegt.

Lösung

(1) Die Dachprodukte
$$v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_k}$$
zu $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ bilden eine Basis von $\bigwedge^k V$.
(2) Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $k \in \mathbb{N}$. Es sei
$$\psi : V^k \longrightarrow W$$
eine alternierende multilineare Abbildung in einen weiteren K-Vektorraum W. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung
$$\tilde{\psi} : \bigwedge^k V \longrightarrow W$$
derart, dass das Diagramm
$$\begin{array}{ccc} V^k & \longrightarrow & \bigwedge^k V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$
kommutiert.
(3) Die zurückgezogene Volumenform besitzt die Darstellung
$$\varphi^*\omega \;=\; (f \circ \varphi) \cdot \det\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$
(4) Es sei $T \subseteq U$ messbar und $\alpha : U \to V$ eine Karte mit der metrischen Fundamentalmatrix $(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ und ihrer Determinante g. Dann ist
$$\int_T \omega \;=\; \int_{\alpha(T)} \sqrt{g} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \;=\; \int_{\alpha(T)} \sqrt{g}\, d\lambda^n.$$

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Es sei K die Kugel mit Radius r und Mittelpunkt $0 = (0, 0, 0)$ im $\mathbb{R}^3$. Wie lautet die Formel (ohne Begründung) für

a) das Volumen der Vollkugel.

b) den Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

Lösung

a) Das Volumen der Vollkugel ist $\frac{4}{3}\pi r^3$.

b) Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche ist $4\pi r^2$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$

eine zweidimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Lösung

Wir betrachten die differenzierbare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 + y^4 + z^6 - 1.$$

Die Menge M ist die Faser von φ über 0. Es ist

$$(D\varphi)_{(x,y,z)} = (2x, 4y^3, 6z^5)\,.$$

Diese Ableitung ist nur bei $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ gleich $(0, 0, 0)$, und dies ist kein Punkt von M, so dass φ in jedem Punkt von M regulär ist. Daher liegt nach dem Satz über implizite Abbildungen eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit vor.

Als Faser einer stetigen Abbildung ist M eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Ferner ist M beschränkt. Für $(x, y, z) \in M$ ist nämlich $|x|, |y|, |z| \leq 1$, da andernfalls $x^2 + y^4 + z^6 > 1$ wäre. Dies impliziert die Kompaktheit.

Aufgabe 5. (6 Punkte)

Zeige, dass die Tangentialabbildung $T(\varphi)$ zu

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1,\ t \longmapsto (\cos t\,,\ \sin t\,),$$

surjektiv ist.

Lösung

Die Abbildung φ ist surjektiv, es ist also lediglich zu zeigen, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die lineare Tangentialabbildung

$$T_t\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \longrightarrow T_{\varphi(t)}S^1$$

surjektiv ist. Da beide Räume eindimensional sind, muss gezeigt werden, dass ein von 0 verschiedener Vektor nicht auf 0 geht. Ein Tangentialvektor an t wird realisiert durch den differenzierbaren Weg

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ s \longmapsto t + s.$$

Der verknüpfte Weg

$$\varphi \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow S^1,\ s \longmapsto (\cos(t+s)\,,\ \sin(t+s)\,),$$

realisiert den Bild-Tangentialvektor, und zwar ist (in der umgebenden Ebene $T_{\varphi(t)}S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$)

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) \;=\; (-\,\sin t\,,\ \cos t\,),$$

und das ist nicht der Nullvektor.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Lösung

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

besitzen bzgl. der Standardbasis die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

deren Determinante ist

$$-20 + 9 + 4 \cdot 6 = 13.$$

Daher repräsentiert diese Basis die Standardorientierung.
Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

besitzen bzgl. der Standardbasis die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -6 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix},$$

deren Determinante ist

$$-3 \cdot 55 - 7(-44 - 6) + 2 \cdot 30 = -165 + 350 + 60 > 0.$$

Daher repräsentiert diese Basis ebenfalls die Standardorientierung, und damit repräsentieren beide Basen die gleiche Orientierung.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\tau$ zu
$\tau = dx \wedge dy \wedge dz - wdx \wedge dy \wedge dw + \cos(xy)\, dx \wedge dz \wedge dw - ywdy \wedge dz \wedge dw$
unter der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (r, s, t) \longmapsto (r^2 s, t,\ \sin r\ , e^{st}) = (x, y, z, w).$$

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} dx &= d(r^2 s) = 2rsdr + r^2 ds, \\ dy &= dt, \\ dz &= d(\sin r) = \cos r\, dr \end{aligned}$$

und

$$dw = d(e^{st}) = se^{st}dt + te^{st}ds.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \varphi^*\tau &= d(r^2 s) \wedge dt \wedge d(\sin r) - e^{st} d(r^2 s) \wedge dt \wedge d(e^{st}) \\ &\quad + \cos(r^2 st)\, d(r^2 s) \wedge d(\sin r) \wedge d(e^{st}) - te^{st} dt \wedge d(\sin r) \wedge d(e^{st}) \\ &= r^2 \cos r\, ds \wedge dt \wedge dr - 2rste^{st}e^{st} dr \wedge dt \wedge ds \\ &\quad + \cos(r^2 st) r^2 se^{st} \cos r\, ds \wedge dr \wedge dt - t^2 e^{st} e^{st} \cos r\, dt \wedge dr \wedge ds \\ &= (r^2 \cos r + 2rste^{2st} - r^2 se^{st} \cos(r^2 st) \cos r - t^2 e^{2st} \cos r) dr \wedge ds \wedge dt \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Berechne das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ zu

$$\gamma : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (-t^2, t^3-1, t+2),$$

für die 1-Differentialform

$$\omega = x^3dx - yzdy + xz^2dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} \gamma^*\omega &= (-t^2)^3d(-t^2) - (t^3-1)(t+2)d(t^3-1) - t^2(t+2)^2d(t+2) \\ &= 2t^7dt - 3t^2(t^4+2t^3-t-2)dt - t^2(t^2+4t+4)dt \\ &= (2t^7-3t^6-6t^5+3t^3+6t^2-t^4-4t^3-4t^2)dt \\ &= (2t^7-3t^6-6t^5-t^4-t^3+2t^2)dt. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_{-1}^0 (2t^7-3t^6-6t^5-t^4-t^3+2t^2)dt \\ &= (\frac{1}{4}t^8 - \frac{3}{7}t^7 - t^6 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3)|_{-1}^0 \\ &= -(\frac{1}{4} + \frac{3}{7} - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \\ &= -\frac{3}{7} + 1 - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{-45+105-21+70}{105} \\ &= \frac{109}{105}. \end{aligned}$$

AUFGABE 9. (5 Punkte)

Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche, die entsteht, wenn man den Graphen

$$\Gamma = \{(x, e^x) |\, x \leq 0\}$$

um die x-Achse rotieren lässt, kleiner als 10 ist.

Lösung

Wir betrachten die Oberfläche für $s \leq x \leq 0$ mit einer beliebigen negativen Zahl s. Der Flächeninhalt ist nach der Rotationsformel gleich

$$2\pi \int_s^0 \sqrt{1 + e^{2t}} e^t dt \,.$$

Da t sich im negativen Bereich bewegt, ist $e^{2t} \leq 1$ und somit ist der Integrand $\leq \sqrt{2} e^t$. Damit ist dieses Integral kleiner/gleich

$$2\pi\sqrt{2} \int_s^0 e^t dt \;=\; 2\pi\sqrt{2}(1 - e^s) \;\leq\; 2\pi\sqrt{2} \;\leq\; 2 \cdot 3,2 \cdot 1,5 \;=\; 2 \cdot 4,8 \;<\; 10.$$

Diese Abschätzung gilt auch für $s \mapsto -\infty$.

Aufgabe 10. (6 (2+2+2) Punkte)
Wir betrachten den Graph M der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \longmapsto u^2 + uv - v^3,$$

als zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, also

$$M = \{(u, v, u^2 + uv - v^3) |\, (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$$

mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten riemannschen Metrik. Es sei

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M,\ (u,v) \longmapsto (u, v, u^2 + uv - v^3),$$

die zugehörige Diffeomorphie.

a) Bestimme das totale Differential zu ψ sowie die Bildvektoren $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$.

b) Bestimme für jeden Punkt der Form $P = (u, 0)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Bestimme für jeden Punkt der Form $P = (0, v)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

Lösung

a) Das totale Differential zu ψ im Punkt $P = (u, v)$ ist

$$(D\psi)_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u + v & u - 3v^2 \end{pmatrix}$$

und es ist

$$T_P(\psi)(e_1) = (D\psi)_P(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u + v \end{pmatrix} \text{ und } T_P(\psi)(e_2) = (D\psi)_P(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u - 3v^2 \end{pmatrix}.$$

b) und c) Zur Bestimmung des Flächeninhalts berechnen wir zunächst die Skalarprodukte der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u+v \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u-3v^2 \end{pmatrix}$. Es ist

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u+v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u+v \end{pmatrix} \rangle = 1 + (2u+v)^2 = 1 + 4u^2 + 4uv + v^2\,,$$

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u+v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u-3v^2 \end{pmatrix} \rangle = (2u+v)(u-3v^2) = 2u^2 - 6uv^2 + uv - 3v^3$$

und

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u-3v^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u-3v^2 \end{pmatrix} \rangle = 1 + (u-3v^2)^2 = 1 + u^2 - 6uv^2 + 9v^4\,.$$

b) Für $P = (u, 0)$ berechnet sich der Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms zu

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 2u^2 \\ 2u^2 & 1+u^2 \end{pmatrix}} \;=\; \sqrt{(1+4u^2)(1+u^2) - 4u^4} \;=\; \sqrt{1+5u^2}.$$

c) Für $P = (0, v)$ berechnet sich der Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms zu

$$\sqrt{\det \begin{pmatrix} 1+v^2 & -3v^3 \\ -3v^3 & 1+9v^4 \end{pmatrix}} \;=\; \sqrt{(1+v^2)(1+9v^4) - 9v^6} \;=\; \sqrt{1+v^2+9v^4}.$$

AUFGABE 11. (8 Punkte)

Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer stetigen positiven Volumenform ω. Zeige, dass

$$\int_M \omega < \infty$$

ist.

Lösung

Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es eine offene Kartenumgebung $P \in U$ und eine Kartenabbildung

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und so, dass $\alpha^{-1*}\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ ist mit f stetig und positiv. Wir finden auch eine offene Umgebung $P \in U' \subseteq U$, die homöomorph zu einem offenen Ball $U' \cong B' \subseteq V$ ist, wobei man auch annehmen kann, dass der Abschluss des Balles ganz in V liegt. Der abgeschlossene Ball ist abgeschlossen und beschränkt, daher ist die stetige Funktion f darauf und somit auch auf U' beschränkt. Es folgt, dass $\int_{U'} \omega$ endlich ist, wobei U' eine offene Umgebung von P ist.

Diese offenen Mengen $U' = U'(P)$ überdecken M. Wegen der Kompaktheit gibt es eine endliche Überdeckung

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

mit $\int_{U_i} \omega < \infty$. Wegen der Positivität gilt somit

$$\int_M \omega \leq \sum_{i=1}^{n} (\int_{U_i} \omega) < \infty.$$

AUFGABE 12. (4 Punkte)
Es seien $W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei

$$\psi : W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei ψ^* das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

Lösung

Seien $P \in W$ und $v \in \mathbb{R}^m$. Es ist einerseits
$d(\psi^* f)(P, v) = D_P(f \circ \psi)(v) = ((D_{\psi(P)} f) \circ (D_P \psi))(v) = (D_{\psi(P)} f)(D_P \psi(v))$.
Andererseits ist auch

$$(\psi^*(df))(P, v) = (df)(\psi(P), (D_P \psi)(v)) = (D_{\psi(P)} f)(D_P \psi(v)).$$

Aufgabe 13. (4 Punkte)
Berechne die äußere Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega = \frac{x^2}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

auf $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y \neq 0\}$.

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} d\omega &= d\frac{x^2}{y} \wedge dx - d\frac{x}{y^2} \wedge dy \\ &= -\frac{x^2}{y^2}dy \wedge dx - \frac{1}{y^2}dx \wedge dy \\ &= \frac{x^2-1}{y^2}dx \wedge dy. \end{aligned}$$