Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 28

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Sei $P = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{P}^n_K$ ein Punkt im projektiven Raum. Zeige, dass es eine offene affine Umgebung $U \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$ gibt derart, dass P in diesem affinen Raum dem Nullpunkt entspricht.

Aufgabe 28.2. Sei $D_+(L) \cong \mathbb{A}^n_K \subset \mathbb{P}^n_K$, wobei L eine homogene Linearform im zugehörigen Polynomring $K[X_0, \ldots, X_n]$ sei. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem projektiven Raum die Zariski-Topologie auf dem affinen Raum induziert.

Aufgabe 28.3. Definiere zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ das Potenzieren $x \mapsto x^n$ als Morphismus der projektiven Gerade auf sich selbst. Wie sehen die Fasern unter diesem Morphismus aus?

Aufgabe 28.4. Bestimme den projektiven Abschluss der durch

$$V((X^2 + Y^2)^2 - 2X(X^2 + Y^2) - Y^2)$$

gegebenen *Kardioide* über den komplexen Zahlen und insbesondere die „Punkte im Unendlichen“.

Aufgabe 28.5. Zeige, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

ein Morphismus von quasiprojektiven Varietäten ist.

Aufgabe 28.6. Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 28.7. Seien X und Y quasiprojektive Varietäten und sei $\varphi : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige, dass φ genau dann ein Morphismus ist, wenn die Einschränkungen $\varphi_i : \varphi^{-1}(U_i) \to U_i$ Morphismen sind für jedes i.

Aufgabe 28.8. Sei K ein Körper. Bestimme den globalen Schnittring

$$\Gamma(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}) .$$

Was folgt daraus für einen Morphismus $\mathbb{P}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$?

Aufgabe 28.9. Man definiere und charakterisiere, wann eine irreduzible quasiprojektive Varietät *normal* ist.

Aufgabe 28.10.*

Sei K ein Körper. Betrachte die affine ebene Kurve

$$C = V(Y - X^3 + X + 2) .$$

Definiere einen Isomorphismus zwischen C und der affinen Geraden $\mathbb{A}^1_K$. Lässt sich ein solcher Isomorphismus zu einem Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}^1_K$ und dem projektiven Abschluss $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2_K$ fortsetzen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.11. (3 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Es sei $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ ein n-dimensionaler affiner Unterraum, der den Nullpunkt nicht enthält, und es sei $\tilde{H}$ der dazu parallele Unterraum durch den Nullpunkt. Es sei $U \subseteq H$ eine in $H \cong \mathbb{K}^n$ offene Menge (in der metrischen Topologie) und es sei V die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt und durch einen Punkt von U. Zeige, dass der Durchschnitt von V mit $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \tilde{H}$ offen ist.

Aufgabe 28.12. (4 Punkte)

Bestimme für die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

den Zariski-Abschluss im $\mathbb{P}^n_K$ des Bildes einer abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{a}) \cap \mathbb{A}^{n+1}_K \setminus \{0\}$.

Aufgabe 28.13. (3 Punkte)

Sei X eine irreduzible quasiprojekive Varietät mit Funktionenkörper $L = K(X)$. Es seien U und U_i, $i \in I$, offene Teilmengen mit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige, dass

$$\Gamma(U, \mathcal{O}) = \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O})$$

ist, wobei der Durchschnitt in L genommen wird.

Aufgabe 28.14. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und $\mathbb{P}_K^n$ der projektive Raum. Zeige, dass die Konstanten die einzigen globalen algebraischen Funktionen sind, d.h. es gilt

$$\Gamma(\mathbb{P}_K^n, \mathcal{O}) = K \, .$$

Bemerkung: Diese Aussage gilt für jede zusammenhängende projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper.