Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2012

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 45

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 45.1. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y\right).$$

Aufgabe 45.2. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto \left(x^2yz^3 - \sin x, \exp\left(x^4y\right) - 2x^2z^3 \cos\left(xy^2z\right)\right).$$

Aufgabe 45.3. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, y \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 45.4. Bestimme sämtliche höheren Richtungsableitungen der Abbildung
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$
die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1,0)$ und $(0,1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 45.5. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 45.6. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und
$$\varphi\colon\ G \longrightarrow W$$
eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit
$$D_{v_n}(\ldots D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) = D_{v_{\sigma(n)}}(\ldots D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$
gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 45.7. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\sin\, xy\,, x^2y^3z^4 - y\,\sinh\, z\,, xy^2z + 5\right).$$

Aufgabe 45.8. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x,y) in Richtung $(2,5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2,5)$ anwendet.

Aufgabe 45.9. (3 Punkte)

Zeige, dass keine partiell differenzierbare Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 45.10. (4 Punkte)

Sei

$$f\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass sämtliche k-ten Richtungsableitungen null sind.

Aufgabe 45.11. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \varphi(x,y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f,g\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass

$$\varphi(x,y) \;=\; f(x)+g(y)$$

gilt.

AUFGABE 45.12. (6 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1D_2f(0,0) \;\neq\; D_2D_1f(0,0)$$

gilt.