Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 14

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 14.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 14.3. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 14.4. Berechne (über den komplexen Zahlen) die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 5-i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 14.5. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 14.6. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

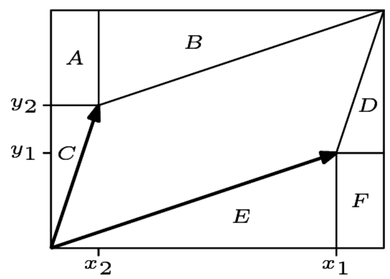
Aufgabe 14.7. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 14.8. Es sei K ein Körper. Zeige, dass die Multiplikation

$$K \times K = K^2 \longrightarrow K, \, (a,b) \longmapsto a \cdot b,$$

multilinear ist. Ist sie alternierend?

Aufgabe 14.9. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



Aufgabe 14.10. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\triangle : W^m \longrightarrow K$$

eine multilineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die verknüpfte Abbildung

$$V^m \longrightarrow K, \, (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto \triangle(\varphi(v_1), \, \ldots, \, \varphi(v_m))$$

multilinear ist. Zeige ebenfalls, dass wenn $\triangle$ alternierend ist, dass dann auch $\triangle \circ \varphi^n$ alternierend ist, und dass hiervon bei φ bijektiv auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 14.11. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{i-1}$, $v_{i+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $\lambda \in K$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \lambda u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ u \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.12. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix über K. Zeige, dass für den Rang die Beziehungen

$$\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} A \text{ und } \operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} B$$

gelten. Zeige, dass links Gleichheit gilt, falls B invertierbar ist, und rechts Gleichheit gilt, falls A invertierbar ist. Man gebe ein Beispiel, das zeigt, dass diese Gleichheit links und rechts auch ohne diese Voraussetzungen gelten kann.

Aufgabe 14.13. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Untersuche die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \times V \longrightarrow W,\ (\varphi, v) \longmapsto \varphi(v),$$

auf Multilinearität.

Aufgabe 14.14. (3 Punkte)

Berechne (über den komplexen Zahlen) die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & 5 \\ i & 1 & 3-i \\ 2i & -4-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.15. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 14.16. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen.

Aufgabe 14.17. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Abbildungsverzeichnis