Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Vorlesung 36

In dieser Vorlesung entwickeln wir die Integrationstheorie in zweierlei Hinsicht weiter. Einerseits untersuchen wir, wie sich bei einer konvergenten Funktionenfolge die Integrale verhalten. Andererseits beschäftigen wir uns mit der Frage, was passiert, wenn wir in einem Integral $\int_a^b f(t)dt$ die Intervallgrenzen gegen unendlich oder gegen eine Zahl, wo die Funktion nicht definiert ist, wandern lassen.

Integrale von Grenzfunktionen

Lemma 36.1. *Es sei*

$$f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Beweis. Da die Grenzfunktion nach Lemma 26.4 stetig ist, existiert das bestimmte Integral rechts nach Satz 31.14. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$| f_n(t) - f(t) | \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $t \in [a, b]$. Daher gilt für diese n die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right| &\leq \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b | f_n(t) - f(t) | \; dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dt \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 36.2. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Es sei*

$$f : M \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

stetig.

Beweis. Aufgrund von Satz 20.3 müssen wir für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit dem Grenzwert x zeigen, dass die Folge der Integrale

$$\int_a^b f(x_n,t)\,dt$$

gegen

$$\int_a^b f(x,t)\,dt$$

konvergiert. Aufgrund von Lemma 36.1 genügt es zu zeigen, dass die Funktionenfolge $f(x_n,-)$ gleichmäßig gegen $f(x,-)$ konvergiert. Nehmen wir also an, dass diese Folge nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ und ein $t_m \in [a,b]$ gibt mit $|\, f(x_m,t_m) - f(x,t_m)\,| \geq \epsilon$. So können wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit zugehörigen Punkten t_{n_k} konstruieren, die diese Abstandbedingung erfüllen. Wegen Satz 22.3 gibt es zu dieser Folge in $[a,b]$ eine konvergente Teilfolge, und durch Umbennen können wir annehmen, dass die Folge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, sagen wir gegen $t \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von f und den Konvergenzeigenschaften gibt es ein k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ die Abschätzungen $|\, f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t)\,| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ und $|\, f(x,t_{n_k}) - f(x,t)\,| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ gelten. Damit ist

$$\begin{aligned} |\, f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t_{n_k})\,| &\leq |\, f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t)\,| + |\, f(x,t) - f(x,t_{n_k})\,| \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Uneigentliche Integrale

Wir erinnern zunächst an die Definition des Grenzwertes.

DEFINITION 36.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M. Dann heißt $w \in M$ der *Grenzwert* von f in a, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in T \cap U(a,\delta)$ ist $f(x) \in U(w,\epsilon)$.

Wir interessieren uns dabei hauptsächlich für den Fall, wo eine stetige Funktion $f :]r, s[\to \mathbb{R}$ gegeben ist und die stetige Fortsetzbarkeit nach r oder nach s geklärt werden soll. Wir wollen aber auch für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Verhalten für $x \mapsto \infty$ oder $x \mapsto -\infty$ erfassen.

Definition 36.4. Sei (M, d) ein metrischer Raum und es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt $w \in M$ der *Grenzwert* von f für $x \mapsto \infty$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \geq s$, ist $d(f(x), w) \leq \epsilon$.

Unter einem Randpunkt eines (ein- oder beidseitig) unbeschränkten Intervalls verstehen wir im Folgenden auch die Symbole ∞ und $-\infty$. Dies heißt nicht, dass diese Symbole zu $\mathbb{R}$ gehören, sondern lediglich, dass man dafür sinnvolle Grenzwertbetrachtungen durchführen kann.

Definition 36.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und r ein Randpunkt von I und $a \in I$. Es sei eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

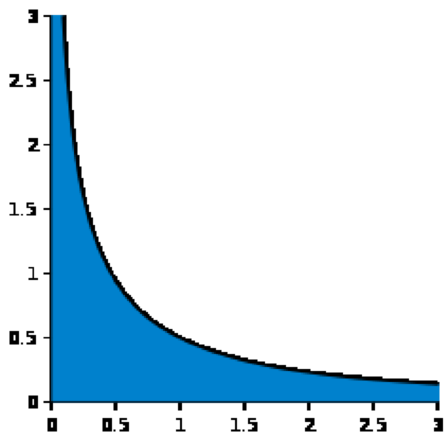
gegeben. Man sagt, dass das *uneigentliche Integral* zu f für $x \to r$ existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt$$

existiert. In diesem Fall schreibt man für diesen Grenzwert auch

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* von a nach r



Die Funktion $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, der blaue Flächeninhalt repräsentiert das (beidseitig) uneigentliche Integral.

Die Existenz dieses uneigentlichen Integrals hängt nicht von dem gewählten Intervallpunkt $a \in I$ ab, wohl aber der Wert des uneigentlichen Integrals. Die inhaltliche Interpretation des uneigentlichen Integrals ist wiederum der Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen, aber erstreckt über ein nicht notwendigerweise kompaktes Intervall. Wenn für die Funktion f eine Stammfunktion F bekannt ist, so geht es um das Bestimmen des Grenzwertes

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt = \lim_{x \to r} F(x) - F(a)\,.$$

LEMMA 36.6. *Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ und r sei ein Randpunkt von I. Es seien*

$$f, h : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

stetige Funktionen mit

$$f(t) \leq h(t) \text{ für alle } t \in I$$

und es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^r h(t)\, dt$$

existiert. Dann existiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und es gilt

$$\int_a^r f(t)\, dt \leq \int_a^r h(t)\, dt$$

Beweis. Wir behandeln den Fall, wo r die obere Intervallgrenze ist. Es ist

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b h(t)\, dt$$

wegen $f(t) \leq h(t)$ für alle $t \in I$. Wegen der Nichtnegativität von h und von f wachsen beide Seite bei $b \to r$, und die rechte Seite ist durch das uneigentliche Integral $\int_a^r h(t)\, dt$ beschränkt. Nach Satz 8.9 existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \to r} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^r f(t)\, dt\,.$$

□

BEISPIEL 36.7. Sei $f(t) = t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für die uneigentlichen Integrale zu f für t von 0 bis 1. Dabei ist die Funktion bei der Intervallgrenze 0 nicht definiert, das ist also der kritische Randpunkt. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ die Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt \; = \; -\ln x,$$

und der Grenzwert für $x \mapsto 0$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1} t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x \to 0} \left(\int_x^1 t^c \, dt \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{c+1} t^{c+1} |_x^1 \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1} \right).$$

Da es sich rechts um eine negative Potenz von x handelt, ist $\lim_{x \to 0} x^{c+1} = \infty$. Das uneigentliche Integral existiert also nicht. Dies folgt übrigens auch aus Lemma 36.6, da ja $t^{-1} \leq t^c$ für $c < -1$ und $0 < t \leq 1$ gilt.

Sei nun $c > -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1} t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x \to 0} \left(\int_x^1 t^c \, dt \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{c+1} t^{c+1} |_x^1 \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1} \right).$$

Da es sich um eine positive Potenz von x handelt, ist $\lim_{x \to 0} x^{c+1} = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $\frac{1}{c+1}$.

Beispiel 36.8. Sei $f(t) = t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das uneigentliche Integral zu f für t von 1 bis ∞. Der kritische Randpunkt ist also ∞. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ die Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_1^x \frac{1}{t} \, dt = \ln x,$$

und der Grenzwert für $x \mapsto \infty$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1} t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x \to \infty} \left(\int_1^x t^c \, dt \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{c+1} t^{c+1} |_1^x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1} \right).$$

Da es sich um eine negative Potenz von x handelt, ist $\lim_{x \to \infty} x^{c+1} = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $-\frac{1}{c+1}$.

Bei $c > -1$ ist $t^c \geq t^{-1}$ für $t \geq 1$ und daher kann nach Lemma 36.6 das uneigentliche Integral nicht existieren.

Definition 36.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit den beiden Randpunkten r und s von I. Es sei eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Man sagt, dass das (*beidseitig*) *uneigentliche Integral*

$$\int_r^s f(t) \, dt$$

existiert, wenn für ein $a \in I$ die beiden einseitig uneigentlichen Integrale

$$\int_r^a f(t) \, dt \text{ und } \int_a^s f(t) \, dt$$

existieren. In diesem Fall setzt man

$$\int_r^s f(t)\,dt := \int_r^a f(t)\,dt + \int_a^s f(t)\,dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* zu f von r nach s.

Die Existenz des beidseitig uneigentlichen Integrals hängt nicht von der Wahl des Punktes $a \in I$ ab. Darüberhinaus hängt der Wert dieses Integrals, falls es existiert, ebensowenig von dem gewählten Punkt ab.

Beispiel 36.10. Die Funktion e^{-t^2} ist nicht elementar integrierbar, d.h. man kann keine geschlossene Stammfunktion mit rationalen Funktionen, Exponentialfunktion, trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen angeben. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,,$$

was wir hier ohne Beweis mitteilen. Durch eine einfache Substitution ergibt sich daraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\,.$$

Dieses Integral nennt man *Fehlerintegral*; es spielt in der Stochastik eine wichtige Rolle.

Abbildungsverzeichnis