Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeige, dass die Assoziiertheit in einem kommutativen Ring eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Beweise die folgenden Eigenschaften zur Teilbarkeit in einem kommutativen Ring R:

(1) Für jedes Element a gilt $1 \mid a$ und $a \mid a$.
(2) Für jedes Element a gilt $a \mid 0$.
(3) Gilt $a \mid b$ und $b \mid c$, so gilt auch $a \mid c$.
(4) Gilt $a \mid b$ und $c \mid d$, so gilt auch $ac \mid bd$.
(5) Gilt $a \mid b$, so gilt auch $ac \mid bc$ für jedes $c \in R$.
(6) Gilt $a \mid b$ und $a \mid c$, so gilt auch $a \mid rb + sc$ für beliebige Elemente $r, s \in R$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeige, dass in einem kommutativen Ring R folgende Teilbarkeitsbeziehungen gelten.

(1) -1 ist eine Einheit, die zu sich selbst invers ist.
(2) Jede Einheit teilt jedes Element.
(3) Sind a und b assoziiert, so gilt $a \mid c$ genau dann, wenn $b \mid c$.
(4) Teilt a eine Einheit, so ist a selbst eine Einheit.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Zu einer natürlichen Zahl n bezeiche $T(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n. Zeige die folgenden Aussagen über $T(n)$.

a) Sei $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann ist

$$T(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1).$$

b) Für teilerfremde Zahlen n und m gilt $T(nm) = T(n)T(m)$.

c) Bestimme die Anzahl der Teiler von 20!.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} - 1$.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Zeige, dass die Multiplikation mit f, also die Abbildung

$$\mu_f : R \longrightarrow R,\, x \longmapsto fx\ ,$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(R, +, 0)$ ist. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung, wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.