Fachbereich Mathematik/Informatik **12. Dezember 2009**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik I

Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Rückgabe in welcher Übungsgruppe ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	3	2	4	14	3	5	3	8	2	3	3	4	4	4	2	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (*kursiv* gedruckten) Begriffe.

(1) Das *Urbild* von einer Teilmenge unter einer Abbildung.
(2) Die *Peano-Axiome*.
(3) Eine *konvergente* Folge in einem angeordneten Körper.
(4) Der *Betrag* einer komplexen Zahl.
(5) Der *Rang* einer linearen Abbildung.
(6) Die *Determinante* (rekursive Definition) einer $n \times n$-Matrix.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es sei M eine beliebige Menge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von M in die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ geben kann.

Aufgabe 4. (14 (=3+2+1+8) Punkte)

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist}.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') gibt mit $b' > 0$.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow M,\ z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung $+$ derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass für $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 8. (8 (=6+2) Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = K^{\mathbb{N}_+}$$

der Vektorraum aller Folgen in K (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

a) Zeige (ohne Sätze über konvergente Folgen zu verwenden), dass die Menge der Nullfolgen, also

$$U = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ konvergiert gegen } 0\}$$

ein K-Untervektorraum von V ist.

b) Sind die beiden Folgen

$$(1/n)_{n \in \mathbb{N}_+} \text{ und } (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}_+}$$

linear unabhängig in V?

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn kern $\varphi = 0$ ist.

Aufgabe 11. (3=(2+1) Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V und es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Familie von Vektoren in W.

a) Zeige, dass es maximal eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i geben kann.

b) Man gebe ein Beispiel für eine solche Situation an, wo es keine lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für alle i gibt.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13. (4 (=2+2) Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Aufgabe 15. (2 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ der K-Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W und es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass die Abbildung

$$F : \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto F(\varphi) := \varphi(v),$$

K-linear ist.