Fachbereich Mathematik/Informatik **9. Juli 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Zweite Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer der folgenden Formel.

$$\int \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh} x)\,.$$

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	10	10	6	9	6	7	64
erhalt. Pkt.:											

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *rektifizierbare* Kurve im $\mathbb{R}^n$.
(2) Eine in einem Punkt *total differenzierbare* Abbildung.
(3) Ein *regulärer Punkt* einer total differenzierbaren Abbildung.
(4) Der *Tangentialraum* an die Faser durch einen Punkt einer total differenzierbaren Abbildung mit einem surjektiven totalen Differential.
(5) Eine *symmetrische* Bilinearform.
(6) Ein *vollständiger* metrischer Raum.
(7) Eine *stark kontrahierende* Abbildung zwischen metrischen Räumen.
(8) Eine *Fahne* in einem endlichdimensionalen Vektorraum.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

AUFGABE 3. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

AUFGABE 4. (4 Punkte)

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

AUFGABE 5. (10 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

Aufgabe 6. (10 (1+9) Punkte)

a) Formuliere den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Beweise die Existenzaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe 7. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ.

b) Zeige, dass φ in $P = (1, 2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Aufgabe 8. (9 (2+2+5) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2x + 3y + 4z).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ. Zeige, dass $P = (1, -2, 1)$ regulär ist.

b) Beschreibe für den Punkt $P = (1, -2, 1)$ den Tangentialraum an die Faser F von φ durch P.

c) Man gebe für $P = (1, -2, 1)$ einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von P in der Faser F durch P an.

Aufgabe 9. (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 10. (7 (5+2) Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.