Fachbereich Mathematik/Informatik **13. Februar 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik I

Zweite Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Die Rückgabe erfolgt am Montag, den 15. Februar 2010 um 14 Uhr in 69/E23.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	5	2	6	5	5	5	4	1	5	5	5	5	3	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *metrischer Raum*.
(2) Ein *zusammenhängender* metrischer Raum X.
(3) Ein *lokales Minimum* einer Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(4) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
zwischen zwei metrischen Räumen X und Y in einem Punkt $x \in X$.
(5) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
($n \in \mathbb{N}$) gegen eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Exponentialreihe*.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.
(8) Das *Taylor-Polynom* vom Grad n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in K$.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Es seien $P = (\frac{3}{4}, -1)$ und $Q = (2, \frac{1}{5})$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

AUFGABE 3. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz nicht für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gelten muss.

Aufgabe 5. (6 Punkte)

Beweise die folgende Aussage: Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 7. (5 (1+4) Punkte)

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Aufgabe 8. (5 (2+2+1) Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|\, f(q) \,| \leq \frac{1}{10}$ ist.

AUFGABE 9. (4 Punkte)

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 10. (1 Punkt)

Besitzt die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp z,$$

eine differenzierbare Umkehrfunktion?

AUFGABE 11. (5 (3+2) Punkte)

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt $x = 1$, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

AUFGABE 12. (5 Punkte)

Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

AUFGABE 13. (5 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2, 3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 14. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Aufgabe 15. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (Man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).