Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 41

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 41.1. Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 41.2. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 41.3. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ *φ-invariant*, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

Aufgabe 41.4. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
(2) V ist φ-invariant.
(3) Eigenräume sind φ-invariant.
(4) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
(5) Sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

Aufgabe 41.5. Es sei K ein Körper und es sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 41.6. Es sei K ein Körper und es sei V ein K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{ v \in V \mid \text{ es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0 \}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 41.7. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung
$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$
eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume
$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$
φ-invariant für jedes i sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.8. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 41.9. (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$
trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 41.10. (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.

Aufgabe 41.11. (4 Punkte)

Es sei M eine Jordanmatrix zum Eigenwert λ. Zeige, dass der Eigenraum von M zum Eigenwert λ eindimensional ist und dass es keine weiteren Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 41.12. (5 Punkte)

Es sei M eine reelle 2×2-Matrix, die über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass M über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Eine Isometrie auf einem euklidischen Vektorraum heißt *eigentlich*, wenn ihre Determinante gleich 1 ist.

Aufgabe 41.13. (5 Punkte)

Es sei

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass f trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann f sogar diagonalisierbar ist.