Fachbereich Mathematik/Informatik **4. Dezember 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik III

Testklausur 1

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	6	6	5	3	3	3	10	5	10	5	64
erhalt. Pkt.:													

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *abzählbare* Menge.
(2) Eine *Mengenalgebra* auf einer Menge M.
(3) Eine *Borelmenge* in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$.
(4) Eine *Ausschöpfung* einer Menge M.
(5) Ein *Maß* auf einem Messraum $(M, \mathcal{A})$ (ohne Bezug auf ein Prämaß).
(6) Ein *translationsinvariantes* Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.
(7) Das *Lebesgue-Integral* zu einer messbaren nichtnegativen Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem σ-endlichen Maßraum $(M, \mathcal{A}, \mu)$.
(8) Der *Limes inferior* zu einer reellen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Der *Eindeutigkeitssatz für Maße.*
(2) Die *Formel* für $\lambda^n(L(S))$ für eine Borelmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ unter einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
(3) Der *Satz von der majorisierten Konvergenz* (oder *Satz von Lebesgue*).
(4) Das *Cavalieri-Prinzip* für eine messbare Teilmenge $T \subseteq M \times N$ zu zwei σ-endlichen Maßräumen $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und die Menge der Abbildungen $\operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{A}$ die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \ldots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ und abgeschlossenen Mengen $A_1, \ldots, A_n$ besteht.

Aufgabe 5. (5 (2+3) Punkte)

Es seien M und N zwei abzählbare Mengen, die beide mit der σ-Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt μ bzw. ν) versehen seien.

a) Zeige, dass M und N σ-endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $M \times N$ ebenfalls das Zählmaß ist.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$v = (2, 3, -4) \text{ und } w = (1, -1, 7)$$

im $\mathbb{R}^3$ erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Es sei M ein Messraum und $f : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f} : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

Aufgabe 9. (10 Punkte)

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $[a,b] \times [c,d] \subseteq B(0,1)$ (mit $a \leq b$ und $c \leq d$) überdecken lässt.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die t-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 11. (10 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha\,, f(x) \sin \alpha\,) |\, x \in [a, b],\ \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

das Volumen 0 besitzt.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und A_t, $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{A_t}. Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x) \longmapsto f(t, x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x)\, d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 72.1 (siehe Anhang) sind erfüllt, welche nicht?

Anhang

Satz 72.1. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, E ein metrischer Raum und*

$$f : E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

(1) *Für alle $t \in E$ ist die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ messbar.*
(2) *Für alle $x \in M$ ist die Funktion $t \mapsto f(t, x)$ stetig in $t_0 \in E$.*
(3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h : M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit

$$|f(t, x)| \leq h(x)$$

für alle $t \in E$ und alle $x \in M$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x)\, d\mu(x),$$

wohldefiniert und stetig in t_0.