Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 16

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Finde für die Funktion

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto f(x)=x^2+x-1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 16.2. Es sei

$$f:[0,1]\longrightarrow [0,1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 16.3. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I\subseteq\mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f:I\longrightarrow\mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 16.4. Es sei

$$f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

von f gibt.

Aufgabe 16.5. Es sei

$$f:I\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 16.6. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 16.7.*

Zeige, dass der Zwischenwertsatz nicht für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gelten muss.

Aufgabe 16.8. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.9. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

Aufgabe 16.10. (4 Punkte)

Finde für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 16.11. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 16.12. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g + h$$

mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.