Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} + 1$.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeige, dass

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$$

ist für alle $k = 1, \ldots, p-1$.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $35 + 18\mathrm{i}$ und $8 + 11\mathrm{i}$.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

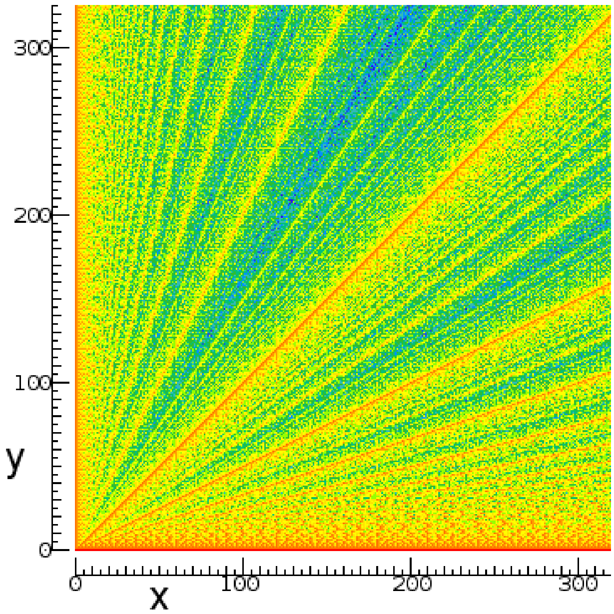
Wende auf zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf?

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{F}_5[X]$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome $P = X^4 + 3X^3 + X^2 + 4X + 2$ und $Q = 2X^3 + 4X^2 + X + 3$.

Aufgabe 6. (4+ Punkte)

Die Beschreibungsseite des folgenden Bildes behauptet, etwas mit dem euklidischen Algorithmus zu tun zu haben. Erläutere dies. Welche Eigenschaften des euklidischen Algorithmus sind in dem Bild sichtbar? Beweise diese Eigenschaften des Algorithmus.



Aufgabe 7. (2 Punkte)

Seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt hat $(x, y) = v(s, -r)$, mit einer eindeutig bestimmten Zahl v.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass die in Aufgabe 7 bewiesene Aussage ohne die Voraussetzung teilerfremd nicht stimmt.

In der folgenden Aufgabe wird der Logarithmus verwendet. Für Eigenschaften dieser Funktion, die aus der Anfängervorlesung bekannt ist, siehe das Merkblatt.

Aufgabe 9. (3+1 Punkte)

Betrachte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen $\ln p$, wobei p durch die Menge der Primzahlen läuft, linear unabhängig ist. Bleibt das Ergebnis gültig, wenn man den natürlichen Logarithmus ln durch einen Logarithmus zu einer anderen Basis ersetzt?

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei $r \in \mathbb{N}$.

a) Finde r aufeinander folgende natürliche Zahlen (also $n, n+1, \ldots, n+r-1$), die alle nicht prim sind.

b) Finde unendlich viele solcher primfreien r-„Intervalle“.